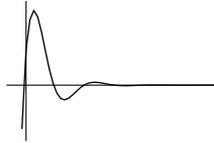


# Formelsammlung Elektrotechnik



## Impressum

Diese Formelsammlung basiert auf Aufzeichnungen und Skizzen seit meinen Tagen auf der Berufsoberschule.

## Zum Dateiformat dieser Formelsammlung

Diese Formelsammlung wurde mit RISC OS erstellt. RISC OS ist ein sehr schnelles, in Assembler geschriebenes Betriebssystem für die moderne, stromsparende ARM-Prozessorarchitektur (ARM: Advanced RISC Machine). Es verfügt über eine außergewöhnlich intuitive Benutzeroberfläche mit der ungewöhnlichen Drag & Drop-Technik. RISC OS ist Open Source (<http://www.riscosopen.co.uk>) und läuft u. a. auf dem Beagle-Board.

Für den Satz wurde TechWriter (<http://www.mw-software.com>) verwendet. TechWriter verfügt über ein eigenes Format, kann jedoch auch TeX (ohne Bilder) erzeugen. Die Zeichnungen sind vektoriell und wurden mit ProCAD(+) (<http://www.zynet.co.uk/dsnell>) sowie ArtWorks 2 (<http://www.mw-software.com>) erstellt. Das endgültige Dokument in Adobe's portablen Dokument Format (PDF) wurde mit einem PostScript 2 / 3 Druckertreiber, GhostScript und PrintPDF (<http://www.steveryatt.org.uk/software/>) erzeugt.

## Haftung

Alle Angaben in dieser Formelsammlung sind <i>ohne</i> Gewähr. Für die Richtigkeit der Inhalte wird <i>nicht</i> garantiert. Für Schäden, welche aus einer Anwendung dieser Formelsammlung entstanden sind, wird <i>nicht</i> gehaftet.
---

Rückmeldungen sind erwünscht.

Juli 2011

Alexander Ausserstorfer,

E-Mail: bavariasound [at] chiemgau - net . de

Web: <http://home.chiemgau-net.de/ausserstorfer/>

## I Grundlagen

### Größen

10 <sup>-1</sup>	Dezi	d	10 <sup>1</sup>	Deka	da
10 <sup>-2</sup>	Zenti	c	10 <sup>2</sup>	Hekto	h
10 <sup>-3</sup>	Milli	m	10 <sup>3</sup>	Kilo	k
10 <sup>-6</sup>	Mikro	μ	10 <sup>6</sup>	Mega	M
10 <sup>-9</sup>	Nano	n	10 <sup>9</sup>	Giga	G
10 <sup>-12</sup>	Piko	p	10 <sup>12</sup>	Tera	T
10 <sup>-15</sup>	Femto	f	10 <sup>15</sup>	Peta	p
10 <sup>-18</sup>	Atto	a	10 <sup>18</sup>	Exa	E

(Auszug aus DIN 1301-1 von Dez 1993)

### In der Formelsammlung verwendete Formelzeichen und Größen

(nach DIN 1304-1 von März 1994)

<i>f</i>	Frequenz	<i>Hertz</i>	$\frac{1}{s}$
<i>i</i>	sich zeitlich veränderlicher Strom	<i>Ampere</i>	<i>A</i>
<i>î</i>	Spitzenwert eines sich zeitlich veränderlichen Stromes	<i>Ampere</i>	<i>A</i>
<i>k</i>	Kopplungsgrad	-	1
<i>p</i>	spezifischer Widerstand	$\Omega m$	$\frac{Vm}{A}$
<i>p</i>	Augenblicksleistung	<i>Watt</i>	<i>VA</i>
<i>u</i>	sich zeitlich veränderliche Spannung	<i>Volt</i>	<i>V</i>
<i>û</i>	Spitzenwert einer sich zeitlich veränderlichen Spannung	<i>Volt</i>	<i>V</i>
<i>ü</i>	Übersetzungsverhältnis	-	1
<i>v</i>	Geschwindigkeit	-	$\frac{m}{s^2}$
<i>w</i>	Energiedichte	$\frac{J}{m^3}$	$\frac{VA \cdot s}{m^3}$
<i>A</i>	Fläche	-	$m^2$
<i>B</i>	Blindwiderstand, Reaktanz	<i>Siemens</i>	$\frac{A}{V}$
<i>B</i>	magnetische Flussdichte	<i>Tesla</i>	$\frac{Vs}{m^2}$
<i>C</i>	Kapazität	<i>Farad</i>	$\frac{As}{V}$
<i>D</i>	Elektrische Flussdichte	-	$\frac{As}{m^2}$
<i>E</i>	Elektrische Feldstärke	-	$\frac{V}{m}$
<i>F</i>	Kraft	<i>Newton</i>	$\frac{kg \cdot m}{s^2}$
<i>F</i>	Formfaktor	-	1
<i>G</i>	Wirkleitwert, Konduktanz	<i>Siemens</i>	$\frac{A}{V}$
<i>H</i>	Magnetische Feldstärke	-	$\frac{A}{m}$
<i>I</i>	Strom	<i>Ampere</i>	<i>A</i>
<i>J</i>	Elektrische Stromdichte	-	$\frac{A}{m^2}$
<i>L</i>	Induktivität	<i>Henry</i>	$\frac{Vs}{A}$

$M$	Dipolmoment		
$N$	Windungszahl	-	1
$P$	Wirkleistung	<i>Watt</i>	$VA$
$Q$	Blindleistung	<i>var</i>	$VA$
$Q$	Ladung	<i>Coloumb</i>	$As$
$R$	<i>Elektrischer</i> Widerstand	$\Omega$	$\frac{V}{A}$
$R_m$	<i>Magnetischer</i> Widerstand	-	$\frac{Vs}{A}$
$S$	Scheinleistung	$VA$	$VA$
$T$	Periodendauer	-	$s$
$U$	Spannung	<i>Volt</i>	$V$
$V_m$	Magnetische Spannung	-	$A$
$W$	Arbeit, Energie	<i>Joule, Wattsekunde, Newtonmeter</i>	$VAs, \frac{kgm^2}{s^2}$
$X$	Blindwiderstand	$\Omega$	$\frac{V}{A}$
$Y$	Komplexer Leitwert, Admittanz	<i>Siemens</i>	$\frac{A}{V}$
$Z$	Komplexer Widerstand, Impedanz	$\Omega$	$\frac{V}{A}$
$\varepsilon$	Permittivität	$\frac{F}{m}$	$\frac{As}{Vm}$
$\eta$	Wirkungsgrad	-	1
$\varphi$	elektrisches Potential	<i>Volt</i>	$V$
$\mu$	Permeabilität	$\frac{H}{m}$	$\frac{Vs}{Am}$
$\kappa$	elektrische Leitfähigkeit	$\frac{S}{m}$	$\frac{A}{Vm}$
$\sigma$	Scheitelfaktor	-	1
$\omega$	Kreisfrequenz	-	$\frac{1}{s}$
$\psi$	elektrischer Fluss	-	$As$
$\Phi$	magnetischer Fluss	<i>Weber</i>	$Vs$
$\Lambda$	magnetischer Leitwert	-	$\frac{Vs}{A}$
$\Theta$	elektrische Durchflutung	<i>Ampere</i>	$A$

### Konstanten

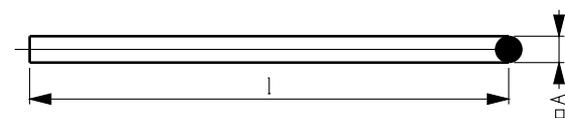
elektrische Feldkonstante  $\varepsilon_0 = 8,854\ 187\ 817 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}$   
 Elementarladung  $e = 1,602\ 177\ 33 \cdot 10^{-19} As$   
 magnetische Feldkonstante  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am}$

### Ohmisches Gesetz:

$$R = \frac{U}{I} \quad [\Omega] \quad (I-1)$$

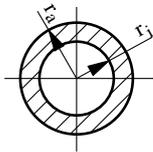
### Spezifischer Widerstand $p$ :

$$p = \frac{RA}{l} \quad \left[ \frac{\Omega m^2}{m} \right] \quad (I-2)$$



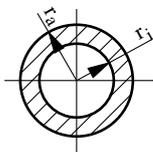
Für die Kugel\* gilt:

$$R = \frac{\rho}{4\pi} \left( \frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_a} \right) \quad [\Omega] \quad (\text{I-3})$$



Für den Zylinder\* gilt:

$$R = \frac{\rho}{2\pi l} \ln \frac{r_a}{r_i} \quad [\Omega] \quad (\text{I-4})$$



(\* Herleitung mit Hilfe des elektrischen Strömungsfeldes)

**Leitfähigkeit  $\kappa$ :**

$$\kappa = \frac{1}{\rho} \quad \left[ \frac{1}{\Omega m} \right] \quad \left[ \frac{S}{m} \right] \quad (\text{I-5})$$

**Widerstands-  
Temperaturkoeffizient  $\alpha_i$ :**

$$R_{t_2} = R_{t_1} [1 + \alpha_1 (t_2 - t_1) + \alpha_2 (t_2 - t_1)^2] \quad [\Omega] \quad (\text{I-6})$$

$R_{t_i}$  : Widerstand bei Temperatur  $t_i$  in [K]

$t_1$  : Ausgangstemperatur

$t_2$  : Endtemperatur

**Ladung  $Q$ :**

$$Q = \int i dt \quad [As] \quad (\text{I-7})$$

**Coulombgesetz:**

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{qQ}{r^2} \quad \left[ \frac{VA_s}{m} \right] \quad [N] \quad (\text{I-8})$$

wobei  $E = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{q}{r^2}$  in  $\left[ \frac{V}{m} \right]$ , siehe auch Kap. III (I-9)

**Spannung  $U$ :**

$$U = \int \vec{E} ds \quad [V] \quad (\text{I-10})$$

**Elektrischer Fluss  $\psi$ :**

$$\psi = Q \quad [C] \quad [As] \quad (\text{I-11})$$

**Elektrische Flussdichte  $D$ :** 
$$Q = \oint \vec{D} d\vec{A} \quad (D \perp A) \quad (I-12)$$

A: Querschnittsfläche

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad \left[ \frac{As}{m^2} \right] \quad (I-13)$$

Kapazität  $C$ : 
$$C = \epsilon \frac{A}{d} \quad \left[ \frac{As}{V} \right] \quad [F] \quad (I-14)$$

$\epsilon$ : Permittivität, siehe (III-3)

**Energie  $W$ :** 
$$W = UI t \quad [VAs] \quad [J] \quad [Ws] \quad [Nm] \quad \left[ \frac{kgm^2}{s^2} \right] \quad (I-15)$$

$$W = \frac{1}{2} C U^2 \quad (I-16)$$

(Energie des elektrischen Feldes, siehe auch Kap. III)

$$W = Q U \quad (I-17)$$

**Elektrische Stromdichte  $J$ :** 
$$I = \int \vec{J} d\vec{A} \quad (J \perp A) \quad (I-18)$$

A: Querschnittsfläche

$$\vec{E} = p \vec{J} \quad \left[ \frac{V}{m} \right] \quad (I-19)$$

p : spezifischer Widerstand

$$\vec{J} = \kappa \vec{E} \quad \left[ \frac{A}{m^2} \right] \quad (I-20)$$

$\kappa$  : Leitfähigkeit

**Dipolmoment  $m$ :** 
$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{E} \quad (\vec{m} = Q \vec{d}) \quad (I-21)$$

**Wirkungsgrad  $\eta$ :** 
$$\eta = \frac{P_{ab}}{P_{zu}} \quad (I-22)$$

## II Netzwerkberechnung

Die hier aufgeführten Regeln gelten für *Gleich-* sowie *Wechselstrom* (komplexe Rechnung), *soweit nicht anders angegeben*.

**Bezugssystem:**



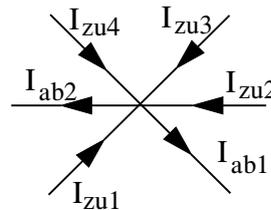
Für die Richtungsangabe von Strom und Spannung verwendet man *Bezugspfeile*. Fließt der Strom tatsächlich in die Richtung, in welche der Pfeil zeigt, ist der Strom *positiv*, sonst *negativ*. Das Gleiche gilt für die Spannung.

**Knotensatz:**

$$\boxed{\sum I_{zu} = \sum I_{ab}} \quad (\text{II-1})$$

Die Summe der zufließenden Ströme muss gleich der Summe der abfließenden Ströme sein.

*Beispiel:*



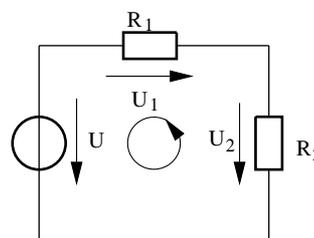
$$I_{zu1} + I_{zu2} + I_{zu3} + I_{zu4} = I_{ab1} + I_{ab2}$$

**Maschensatz:**

$$\boxed{\sum_{k=1}^n U_k = 0} \quad (\text{II-2})$$

Die Summe aller in einer Masche auftretenden Spannungen ist (unter Beachtung ihrer Orientierung) gleich null.

*Beispiel:*



$$U_1 + U_2 = U$$

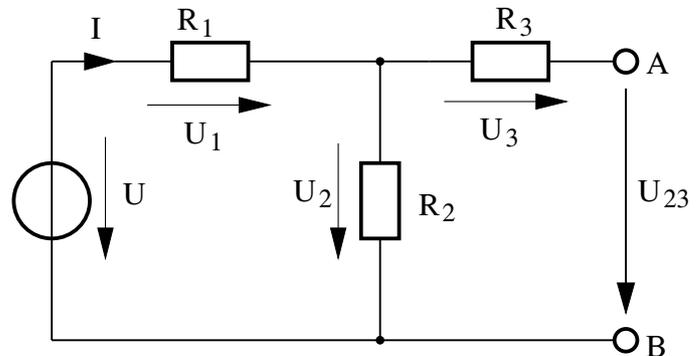
**Ersatzwiderstand  $R_{ges}$ :**

Der tatsächliche *Strömungswiderstand* wird durch die Spannung  $U$  gekennzeichnet. Der Widerstandswert  $R$  gibt die

Eigenschaft eines (oder mehrerer) Bauteils (Bauteile) an, bei einem bestimmten Strom  $I$  jeweils eine dazu proportionale Spannung  $U$  zu erwirken.

Nur ein Widerstand, durch den ein Strom fließt, wirkt.

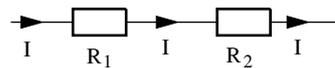
Beispiel:



Solange die Punkte A und B *nicht miteinander verbunden sind*, kann durch  $R_3$  *kein* Strom fließen. Folglich ist die Spannung  $U_3 = 0$ , da das Bauteil nicht wirken kann. Für die Spannung  $U_{23}$  zwischen den Anschlusspunkten A und B gilt somit:  
 $U_{23} = U_2$ .

Für den Ersatzwiderstand  $R_{ges}$  einer *Reihenschaltung* von  $n$  Widerständen gilt:

$$R = R_1 + R_2 + \dots + R_n = \sum_{k=1}^n R_k \quad [\Omega] \quad (\text{II-3})$$



**Bild:** Reihenschaltung von Widerständen

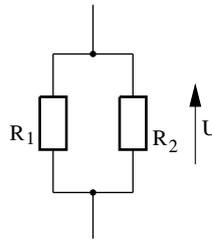
Eine *Reihenschaltung* von Widerständen erkennt man daran, dass durch jeden Widerstand der *gleiche* Strom fließt.

Für den Ersatzwiderstand  $R_{ges}$  einer *Parallelschaltung* von  $n$  Widerständen gilt:

$$\frac{1}{R_{ges}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \quad (\text{II-4})$$

bzw. mit  $G = \frac{1}{R}$ :

$$G_{ges} = \sum_{k=1}^n G_k \quad (\text{II-5})$$



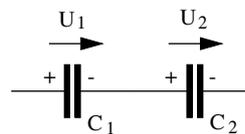
**Bild:** Parallelschaltung von Widerständen

Eine *Parallelschaltung* von Widerständen erkennt man daran, dass an jedem Widerstand die *gleiche Spannung* (bezogen auf den gleichen Knotenpunkt) anliegt.

**Ersatzkapazität  $C_{ges}$ :**

Für die Ersatzkapazität  $C_{ges}$  einer *Reihenschaltung* von n Kondensatoren gilt:

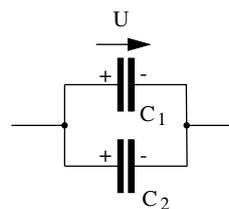
$$\frac{1}{C_{ges}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} \quad (\text{II-6})$$



**Bild:** Reihenschaltung von Kondensatoren

Für die Ersatzkapazität  $C_{ges}$  einer *Parallelschaltung* von n Kondensatoren gilt:

$$C_{ges} = C_1 + C_2 + \dots + C_n \quad [\text{As}] \quad [C] \quad (\text{II-7})$$



**Bild:** Parallelschaltung von Kondensatoren

Wirken mehrere Kapazitäten als *Wechselstromwiderstände*, kann an ihrer Stelle ihre *Ersatzkapazität* verwendet werden.

**Ersatzinduktivität  $L_{ges}$ :**

Für die Ersatzinduktivität  $L_{ges}$  von n *in Reihe geschalteten* Spulen gilt:

$$L_{ges} = L_1 + L_2 + L_3 + \dots + L_n \quad (\text{II-8})$$

Für die Ersatzinduktivität  $L_{ges}$  von  $n$  parallel geschalteten Spulen gilt:

$$\frac{1}{L_{Ges}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_n} \quad (\text{II-9})$$

**Spannungsteilerregel:**

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1}{R_2} \quad (\text{II-10})$$

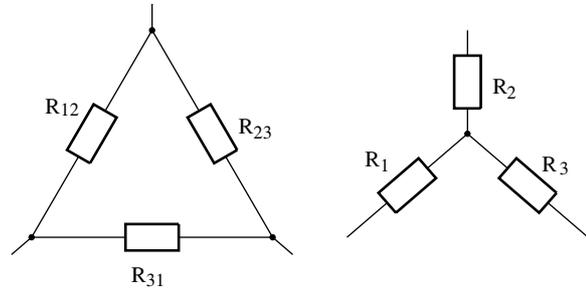
**Stromteilerregel:**

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1} \quad (\text{II-11})$$

**Leistungsteilerregel:**

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{R_1}{R_2} \quad (\text{II-12})$$

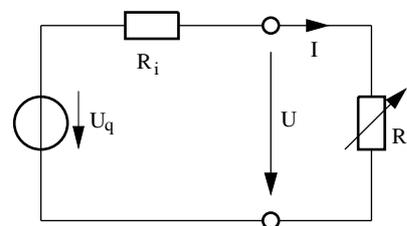
**Dreieck-Stern-Umwandlung:**



$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{R_{12} \cdot R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} & R_{12} &= R_1 + R_2 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_3} \\ R_2 &= \frac{R_{23} \cdot R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} & R_{23} &= R_2 + R_3 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1} \\ R_3 &= \frac{R_{31} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} & R_{31} &= R_3 + R_1 + \frac{R_3 \cdot R_1}{R_2} \end{aligned} \quad (\text{II-13})$$

**Leistungsanpassung:**

Für Gleichstrom gilt:  $R_a = R_i$  (II-14)



**Bild:** Zur Leistungsanpassung

Für Wechselstrom gilt:  $Z_a = Z_i^*$  (II-15)

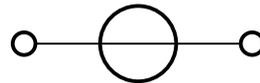
( $Z_i^*$ : konjugiert komplex)

**Ideale Spannungsquelle:**

Bei einer idealen Spannungsquelle ist der Innenwiderstand

$$R_i = 0$$

Dieser Zusammenhang findet sich auch im Schaltungssymbol wieder (durchgehende Linie):



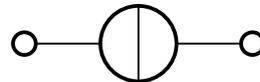
**Bild:** ideale Spannungsquelle

**Ideale Stromquelle:**

Bei einer idealen Stromquelle ist der Innenwiderstand

$$R_i \rightarrow \infty$$

Dieser Zusammenhang findet sich auch im Schaltungssymbol wieder (unterbrochene Linie, d. h. dass kein Strom durch die Quelle, sondern nur aus ihr heraus- oder in sie hineinfließen kann):



**Bild:** ideale Stromquelle

**Reale Spannungsquelle:**

$$U = U_q - IR_i$$

(II-16)

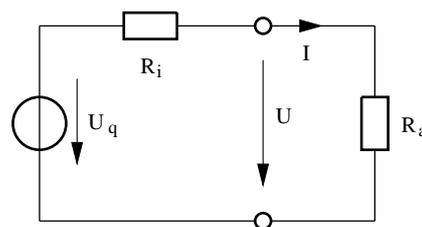
$U_q$ : Leerlauf-, Quellenspannung

$U$ : Klemmenspannung

$R_i$ : Innenwiderstand

$R_a$ : Belastungs-, Verbraucherwiderstand

$I$ : Belastungsstrom



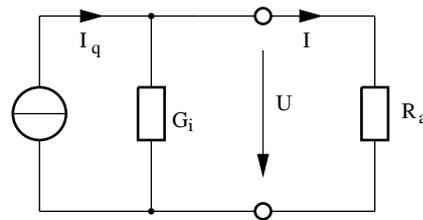
## Reale Stromquelle

Für den Quellenstrom  $I_q$  gilt (durch Kurzschluss von realer Spannungsquelle und realer Stromquelle und Gleichsetzen):

$$I_q = \frac{U_q}{R_i} \quad (\text{II-17})$$

Für den Innenleitwert  $G_i$  gilt:

$$G_i = \frac{I_q}{U_q} = \frac{1}{R_i} \quad (\text{II-18})$$

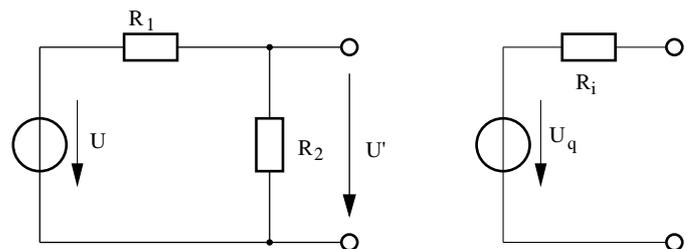


## Ersatzspannungsquelle:

Die *Quellenspannung*  $U_q$  einer Ersatzspannungsquelle ist gleich der im Leerlauf zwischen den Klemmen des gegebenen Zweipols vorhandenen Spannung  $U'$ .

$$U_q = U' \quad (\text{II-19})$$

Der *Innenwiderstand*  $R_i$  ist gleich dem zwischen den Klemmen des betreffenden Zweipols bestehenden Widerstand, wobei alle internen *Spannungsquellen* kurzgeschlossen und alle internen *Stromquellen* getrennt werden müssen.  $R_i$  ist (bezüglich Stromfluss) von  $U'$  aus gesehen zu berechnen.



## Überlagerungsverfahren\*:

Man erhält die *Zweigströme* eines Netzwerkes dadurch, dass man die von den einzelnen Spannungs- oder Stromquellen verursachten Teilströme richtungsrichtig (unter Beachtung des Vorzeichens) addiert.

(\* basiert auf dem Überlagerungsgesetz) (II-20)

Für die Ermittlung der Teilströme (einer einzigen Quelle) sind *alle nicht betrachteten*

- Spannungsquellen  $U_q$  kurzzuschließen

## Maschenstromverfahren

- Stromquellen  $I_q$  aufzutrennen

Es wird das folgende Gleichungssystem verwendet:

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & \dots & R_{1n} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & \dots & R_{2n} \\ \cdot & \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{m1} & R_{m2} & R_{m3} & \dots & R_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \dots \\ I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \dots \\ U_m \end{bmatrix} \quad (\text{II-21})$$

(Einheit:  $[\Omega \cdot A] = V$ )

Vorgehensweise:

- *Maschenströme* eintragen (Anzahl der Maschenströme gleich der Anzahl der vorhandenen Maschen). Dabei müssen jene Ströme gewählt werden, die *nicht* durch die gemeinsamen Zweige fließen.
- Die *Summe* aller Widerstände einer Masche tritt als *Koeffizient* für den zugehörigen (noch unbekannt) Maschenstrom auf.
- Die Koeffizienten für die anderen Maschenströme sind die Kopplungswiderstände. Ihr *Vorzeichen* ist positiv, wenn die Maschenströme in den betreffenden Kopplungswiderständen den gleichen Bezugssinn haben, sonst negativ.
- Rechts des Gleichungssystems steht die Summe der Quellenspannungen, die in der betreffenden Masche auftreten. *Vorzeichenregel*: Stimmt ihr Richtungssinn mit der Richtung des Maschenstromes überein, erhält jede Quellenspannung hierbei ein Minuszeichen. Andernfalls ein Pluszeichen.

Die Kopplungswiderstände liegen stets symmetrisch zur Hauptdiagonalen der Widerstandsmatrix.

## Knotenpotenzial-Verfahren

Das *Knotenpotenzial-Verfahren* ist von Vorteil, wenn das Netzwerk nur über *wenige* Knotenpunkte - bei relativ vielen Maschen - verfügt.

Es wird das folgende Gleichungssystem verwendet:

$$\begin{bmatrix} G_{11} & -G_{12} & -G_{13} & \dots & -G_{1n} \\ -G_{21} & G_{22} & -G_{23} & \dots & -G_{2n} \\ \cdot & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -G_{m1} & -G_{m2} & -G_{m3} & \dots & G_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{10} \\ U_{20} \\ \dots \\ U_{m0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{q1} \\ I_{q2} \\ \dots \\ I_{qm} \end{bmatrix} \quad (\text{II-22})$$

(Einheit:  $[S \cdot V] = A$ )

Vorgehensweise:

- Alle (möglichen) Spannungsquellen in Ersatzstromquellen umwandeln.
- *Ideale* (nicht wandelbare) *bekannte Spannungsquellen* können u. U. zusammen mit den *Leitwerten* auf die rechte Seite des Gleichungssystem gebracht werden. Dadurch vereinfacht sich das Gleichungssystem erheblich.
- Einen Knotenpunkt als Bezugsknoten wählen ( $\varphi = 0$ ).
- Knotenspannungen einzeichnen. Pfeile zeigen auf Bezugsknoten.
- *Knotenleitwerte* treten als *Koeffizienten* bei der zugehörigen Knotenspannung auf.
- *Kopplungswerte* treten als *Koeffizienten* bei den anderen Knotenspannungen auf (Vorzeichen *immer* negativ).
- Rechts der Gleichung stehen die bereits bekannten Quellenströme. Vorzeichen ist positiv, wenn die Pfeilrichtung des Stromes auf den Knotenpunkt zeigt; sonst negativ.

### III Elektrisches Feld

**Elektrische Feldstärke  $E$ :**  $\vec{F} = Q\vec{E}$  (III-1)

$$E = \frac{U}{d} = \nu B \quad \left[ \frac{V}{m} \right] \quad \text{(III-2)}$$

d: Abstand, B: magnetische Feldstärke

**Permittivität  $\varepsilon$ :**  $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$   $\left[ \frac{As}{Vm} \right]$  (III-3)

$\varepsilon_0$  : elektrische Feldkonstante

$$\varepsilon_0 = 8,854\,187\,817 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}$$

$\varepsilon_r$  : Permittivitätszahl (dimensionsloser Faktor)

**Dielektrikum:** Nichtleitende Materie, die von einem elektrischen Feld durchsetzt wird, bezeichnet man als *Dielektrikum*. Das Dielektrikum wird im elektrischen Feld durch die *Permittivitätszahl*  $\varepsilon_r$  (dimensionsloser werkstoffabhängiger Faktor) berücksichtigt.

**Kapazität  $C$ :**  $C = \frac{Q}{U}$  [F]  $\left[ \frac{As}{V} \right]$  (III-4)

**Ladestrom  $i$ :**  $i = C \frac{du}{dt}$  [A] (III-5)

Der Ladestrom  $i$  ist *zeitlich veränderlich*.

An einer Kapazität  $C$  kann die Spannung  $u$  nicht springen; der Strom  $i$  hingegen schon:  $C$  *bremst Spannung*. Die Kapazität  $C$  wirkt als *Energiespeicher*.

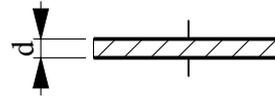
**Energiedichte  $w$ :**  $w = \frac{1}{2} \varepsilon E^2$   $\left[ \frac{VAs}{m^3} \right]$   $\left[ \frac{J}{m^3} \right]$  (III-6)

$$w = \frac{1}{2} \cdot \frac{D^2}{\varepsilon} \quad \text{(III-7)}$$

**Energie  $W$ :**  $W = \frac{1}{2} CU^2$  [VAs] [J] [Ws] [Nm]  $\left[ \frac{kgm^2}{s^2} \right]$  (III-8)

$$W = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C} \text{ mit } U = \frac{Q}{C} \quad \text{(III-9)}$$

**Plattenkondensator**



Für die Oberfläche einer Platte gilt:

$$\boxed{A = ab} \quad [m^2] \quad (\text{III-10})$$

Kraft  $F^*$ :

$$\boxed{F = \frac{1}{2}EDA = \frac{1}{2}\frac{U^2C}{d}} \quad [N] \quad (\text{III-11})$$

\* Kraft zwischen den Elektroden

Elektrische Flussdichte  $D$ :

$$\boxed{D = \frac{Q}{A}} \quad \left[\frac{As}{m^2}\right] \quad (\text{III-12})$$

Elektrische Feldstärke  $E$ :

$$\boxed{E = \frac{U}{d}} \quad \left[\frac{V}{m}\right] \quad (\text{III-13})$$

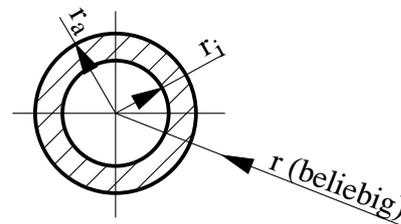
$d$  : Plattenabstand

Kapazität  $C$ :

$$\boxed{C = \varepsilon\frac{A}{d}} \quad \left[\frac{As}{V}\right] \quad [F] \quad (\text{III-14})$$

$\varepsilon$ : Permittivität, siehe (III-3)

**Kugel**



Für die Oberfläche einer Kugel gilt:

$$\boxed{A = 4\pi r^2} \quad [m^2] \quad (\text{III-15})$$

Elektrische Flussdichte  $D$ :

$$\boxed{D = \frac{Q}{4\pi r^2}} \quad \left[\frac{As}{m^2}\right] \quad (\text{III-16})$$

Elektrische Feldstärke  $E$ :

$$\boxed{E = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}} \quad \left[\frac{V}{m}\right] \quad (\text{III-17})$$

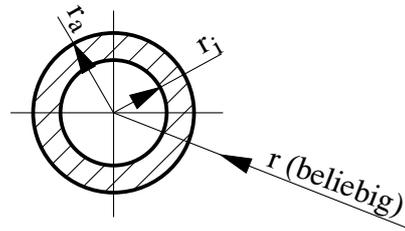
Elektrisches Potential  $\varphi$ :

$$\boxed{\varphi = \int_r^\infty \vec{E}d\vec{x} = \frac{Q}{4\pi\epsilon r}} \quad [V] \quad (\text{III-18})$$

Kapazität  $C$ :

$$C = 4\pi\epsilon \frac{r_i r_a}{r_a - r_i} \quad \left[\frac{As}{V}\right] \quad [F] \quad (\text{III-19})$$

Langer, gerader Zylinder



Für die Oberfläche gilt:

$$A = 2\pi r l \quad [m^2] \quad (\text{III-20})$$

Elektrische Flussdichte  $D$ :

$$D = \frac{Q}{2\pi r l} \quad \left[\frac{As}{m^2}\right] \quad (\text{III-21})$$

Elektrische Feldstärke  $E$ :

$$E = \frac{Q}{2\pi\epsilon r l} \quad \left[\frac{V}{m}\right] \quad (\text{III-22})$$

Potential  $\varphi$ :

$$\varphi = \int_{r_i}^{r_a} E dr = \frac{Q}{2\pi\epsilon l} \ln \frac{r_a}{r_i} \quad [V] \quad (\text{III-23})$$

Kapazität  $C$ :

$$C = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln \frac{r_a}{r_i}} \quad \left[\frac{As}{V}\right] \quad [F] \quad (\text{III-24})$$

## IV Magnetisches Feld

### Allgemeines:

Die Grundlagen des *Magnetismus* beschreibt das von Ampere stammende *Durchflutungsgesetz*. Es besagt, dass jede gleichmäßig bewegte Ladung (Strom) in einem umliegenden Raumpunkt eine bestimmte magnetische Feldstärke erzeugt.

Das magnetische Feld beschreibt die Wechsel- oder Kraftwirkung von zwei gleichmäßig bewegten elektrischen Feldern und ist auf diese zurückführbar. Eigentlich handelt es sich um eine Hilfskonstruktion, mit der man die Wechselwirkung von elektrischen Feldern beschreiben kann.

Erweitert wurde das Durchflutungsgesetz durch die Maxwellschen Gleichungen. Im Prinzip besagen diese, dass nicht nur *bewegte* elektrische Ladungen (Strom) eine magnetische Feldstärke erzeugen, sondern auch deren zeitliche Veränderung (Verstärkung oder Abschwächung der Ladung).

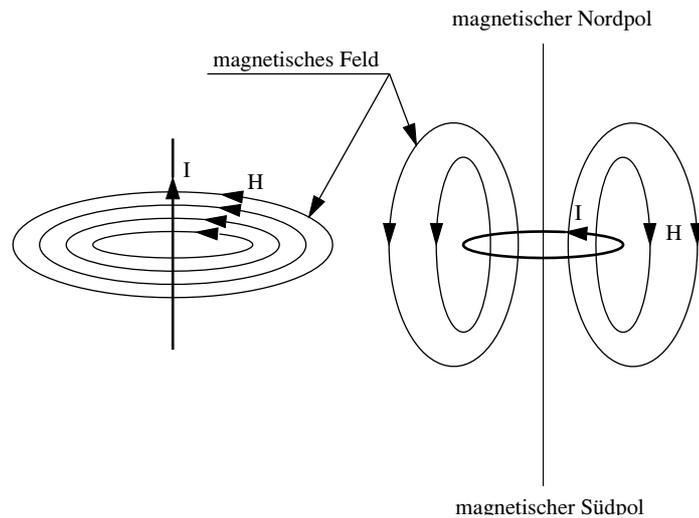
Bei der Vorstellung vom magnetischen Feld handelt es sich um eine *Abstraktion*. Magnetische Felder werden durch *sich bewegende elektrische Felder* verursacht. Daraus resultiert:

- dass *magnetische Feldlinien stets geschlossen* sein müssen, also weder Anfang noch Ende besitzen.
- dass es *keine magnetischen Monopole<sup>1</sup>* gibt (da das Phänomen tatsächlich durch bewegte elektrische Felder verursacht wird).
- dass *Elektronen in einem Magnetfeld zwar eine Ablenkung, aber keine Geschwindigkeitsänderung* erfahren.

<sup>1</sup> bei einem Monopol würde es sich hier um einen allein auftretenden magnetischen Süd- oder Nordpol handeln.

### Magnetische Feldstärke $H$ :

$$H = \frac{IN}{l} = \frac{I}{2\pi r} \quad \left[ \frac{A}{m} \right] \quad (IV-1)$$



**Bild:** Zur Definition der *magnetischen Feldstärke H*. Links ist das Magnetfeld eines vom Strom durchflossenen, *geraden Leiters* dargestellt. Rechts sieht man das Magnetfeld eines *Ringstromes*, wie er etwa in Dauermagneten (Stichworte: *Elektronengas, Metallbindung*) oder im Erdinneren vorkommt. (Vergleiche auch das Magnetfeld einer langgestreckten *Feldspule*.)

**Magnetische Flussdichte  $B$ :**

$$B = \frac{F}{l} = \mu H \quad \left[ \frac{Vs}{m^2} \right] \quad [T] \quad (IV-2)$$

Die *magnetische Flussdichte B* berücksichtigt die Materialeigenschaften des durchströmten Raumes und gibt somit Auskunft über die *Stärke* des magnetischen Feldes.

**Permeabilität  $\mu$ :**

$$\mu = \mu_r \mu_0 \quad \left[ \frac{Vs}{Am} \right] \quad (IV-3)$$

$\mu_0$  : magnetische Feldkonstante

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am}$$

**Magnetischer Fluss  $\Phi$ :**

$$\Phi = \oint_A \vec{B} d\vec{A} \quad [Vs] \quad [W] \quad (IV-4)$$

**Verkettungsfluss  $\Psi$ :**

$$\Psi_m = \sum_{i=1}^n \Phi_i \quad [Vs] \quad (IV-5)$$

$$\Psi_m = N\Phi = IL \quad (IV-6)$$

**Gesetz von Biot-Savart:**

$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \oint_L \frac{d\vec{L} \times \vec{r}}{r^3} \quad \left[ \frac{A}{m} \right] \quad (IV-7)$$

$$dH = \frac{I \sin \alpha}{4\pi r^2} ds$$

$$I = \oint_A \vec{s} d\vec{A}$$

**Magnetfeld im Zentrum:**  $\boxed{H = \frac{I}{2r}}$   $\left[\frac{A}{m}\right]$  (IV-8)

**Elektrische Durchflutung  $\Theta$ :**  $\boxed{\Theta = \sum_{i=1}^n I_i N_i}$  [A] (IV-9)

$n$ : Anzahl der Ströme. Für  $n \rightarrow \infty$  muss über die Fläche  $A$  integriert werden.

**Durchflutungsgesetz:**  $\boxed{\oint_s \vec{H} d\vec{s} = \Theta}$  [A] (IV-10)

**Ohmsches Gesetz des magnetischen Kreises:**  $\boxed{\Theta = \Phi R_m}$  [A] (IV-11)

**Magnetischer Widerstand  $R_m$ :**  $\boxed{R_m = \frac{l}{\mu A}}$   $\left[\frac{A}{Vs}\right]$  (IV-12)

**Magnetischer Leitwert  $\Lambda$ :**  $\boxed{\Lambda = \frac{\mu A}{l}}$   $\left[\frac{Vs}{A}\right]$  (IV-13)

**Magnetische Spannung  $V_m$ :**  $\boxed{V_m = Hs}$  [A] (IV-14)

$s$ : Weg

**Energiedichte  $w$ :**  $\boxed{w = \frac{W}{V} = \int_0^{B_1} H dB}$   $\left[\frac{VA_s}{m^3}\right]$   $\left[\frac{J}{m^3}\right]$  (IV-15)

V: Volumen

Für konstante Permeabilität ( $B = \mu_0 H$ ) gilt:

$\boxed{w = \frac{B^2}{2\mu_0} dB = \frac{1}{2} \mu_0 H^2 = \frac{1}{2} HB}$   $\left[\frac{VA_s}{m^3}\right]$   $\left[\frac{J}{m^3}\right]$  (IV-16)

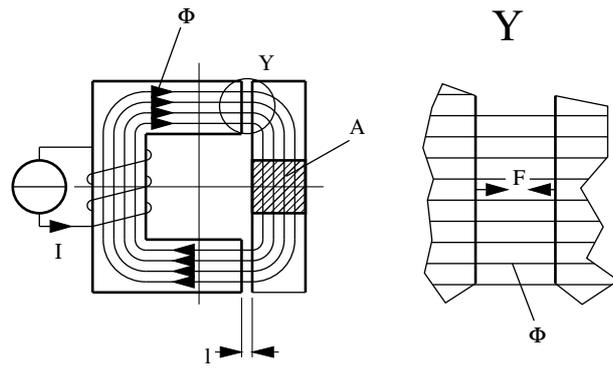
**Im Magnetfeld gespeicherte Energie  $W$ :**  $\boxed{W = \int_V w dV}$  [VA<sub>s</sub>] [J] (IV-17)

Für eine Spule mit der (konstanten) Induktivität  $L$  gilt:

$\boxed{W = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \Psi_m I = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Psi_m^2}{L}}$  [VA<sub>s</sub>] [J] (IV-18)

**Kraft an Grenzflächen:**  $\boxed{F = \frac{B^2}{2\mu_0} \cdot A = \frac{\Phi^2}{2\mu_0 A}}$  [N] (IV-19)

(gilt nur für 1 Seite der Grenzflächen, siehe Bild)



## 5. Elektromagnetische Induktion

**Allgemeines:**

Die *Induktionsquellenspannung* und auch die *Induktionsstromstärke* sind im allgemeinen, d. h. bei *nichtlinearen* Änderungen des magnetischen Flusses, ebenfalls *zeitlich* veränderlich.

**Bewegter Leiter im Magnetfeld:**

$$\boxed{U = Blv} \quad [V] \quad (V-1)$$

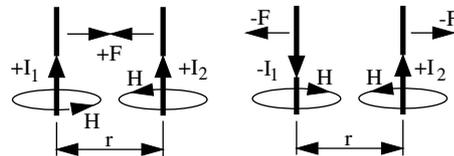
**Stromführender Leiter im Magnetfeld:**

$$\boxed{\vec{F} = I(\vec{l} \times \vec{B})} \quad [N] \quad (V-2)$$

$$F = BIl \sin \alpha \quad [N] \quad (V-3)$$

**Kraft zwischen 2 stromführenden Leitern:**

$$\boxed{F = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi r}} \quad [N] \quad (V-4)$$



**Bild 5.1:** Die Richtung der Kraftwirkung wird durch *das* Vorzeichen der Ströme berücksichtigt.

**Bewegte Ladung im Magnetfeld (Lorenzkraft):**

$$\boxed{F_L = q(\vec{v} \times \vec{B}) = qvB \sin \alpha} \quad [N] \quad (V-5)$$

Es gelten:

- die *rechte* Hand-Regel für *positive* Ladungsträger
- die *linke* Hand-Regel für *negative* Ladungsträger

(*v*: Daumen, *B*: Zeigefinger, *F<sub>L</sub>*: Mittelfinger)

**Hallspannung  $U_H$ :**

$$\boxed{U_H = Eb = vBb = \frac{IB}{end} = \frac{A_H IB}{d}} \quad [V] \quad (V-6)$$

(Voraussetzung:  $\vec{B} \perp \vec{l}$  bzw.  $\vec{B} \perp \vec{v}$ )

*v*: mittlere Geschwindigkeit der Elektronen

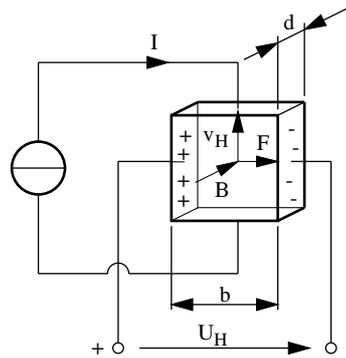
Elementarladung *e*:  $e = 1,602\,176\,53 \cdot 10^{-19} \text{ As}$

Ladungsträgerdichte *n*: *materialabhängig*

$$A_H = \frac{1}{nq}$$

ist dabei die Hall-Konstante  $A_H$ . Sie charakterisiert die Stärke

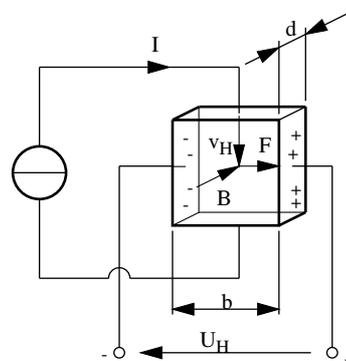
des Hall-Effektes.



**Bild 5.2:** Zur Hallspannung ( $U_H$  und  $F$  sind hier für *negative* Ladungsträger angegeben.)

Die im Plättchen *normalerweise gleichmäßig* verteilten Elektronen des Stromes  $I$  werden durch das Magnetfeld mit der magnetischen Flussdichte  $B$  *seitlich abgedrängt*, so dass die Spannung  $U_H$  entsteht.

In **Bild 5.2** sind  $U_H$  und  $F$  für *negative* Ladungsträger angegeben. Falls sich positive Ladungsträger bewegen (z. B. Löcher in *p-dotiertem* Halbleitermaterial), bewegen sich diese *in umgekehrter Richtung*. Sie werden durch das Magnetfeld zur *gleichen Seite* hin abgelenkt wie negative Ladungsträger; dadurch kehrt sich aber *das Vorzeichen* von  $U_H$  oder *die Orientierung* des zugehörigen Zählpfeiles um.



**Bild 5.3:** Zur Hallspannung ( $U_H$  und  $F$  sind hier für *positive* Ladungsträger angegeben.)

Der Hall-Effekt hängt stark von der (vorzeichenbehafteten) Ladungsträgerdichte  $n$  ab, weil die geringere Anzahl von Ladungsträgern bei gleicher Stromstärke eine höhere Geschwindigkeit der Einzelladungen zur Folge hat.

Da die Ladungsträgerdichte  $n$  bei Halbleitern wesentlich geringer als bei Metallen ist, benutzt man *vorwiegend Halbleiter* als Hall-Sonden.

**Elektrische Feldstärke  $E$ :**

$$\boxed{E = vB} \quad \left[\frac{V}{m}\right] \quad (V-7)$$

$v$ : mittlere Geschwindigkeit der Elektronen

**Mittlere Geschwindigkeit  $v$  der Elektronen:**

$$\boxed{v = \frac{I}{enA}} \quad \left[\frac{m}{s}\right] \quad (V-8)$$

$A$ : Leiterquerschnitt ( $A = bd$ )

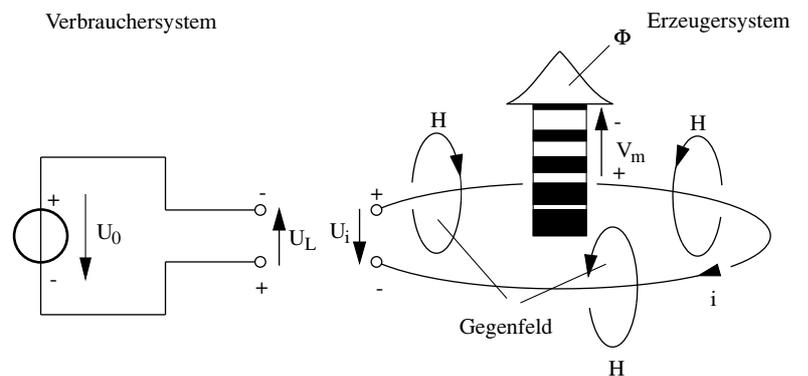
**Induktionsgesetz:**

$$\boxed{U_i = -N \frac{d\Phi(t)}{dt}} \quad [V] \quad (V-9)$$

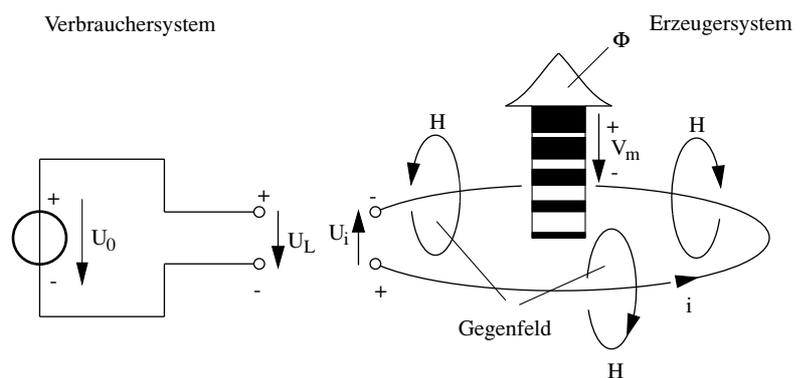
$$U_L = -U_i$$

$U_L$ : Spannung im Verbrauchersystem

$U_i$ : Spannung im Erzeugersystem



Flusszunahme ( $\Phi > 0$ )



Flussabnahme ( $\Phi < 0$ )

**Lenz'sche Regel:** Der durch Induktion hervorgerufene Strom ist so gerichtet, dass sein Magnetfeld dem induzierenden entgegenwirkt.

Die Spannung  $U_i$  ist bei *zunehmenden* magnetischen Fluss ( $+\Phi$ ) *negativ* und bei *abnehmenden* Fluss ( $-\Phi$ ) *positiv*.

Das Vorzeichen der Induktionsspannung  $U_i$  bezieht sich dabei auf eine andere im Stromkreis bereits bestehende Spannung  $U_0$  (Verbrauchersystem).

### Induktivität $L$ :

Für eine langgestreckte Zylinderspule gilt:

$$L = N^2 \frac{\mu A}{l} = N^2 \Lambda = N^2 \frac{1}{R_m} \quad \left[ \frac{Vs}{A} \right]; [H] \quad (V-10)$$

$l$ : Spulenlänge

$A$ : Spulenquerschnitt

Für die an der Spule anliegende *Selbstinduktionsspannung*  $U_{is}$  gilt:  $U_{is} = -L \frac{di(t)}{dt}$  (V-11)

An einer Induktivität  $L$  kann der Strom  $i$  nicht springen; die Spannung  $u$  hingegen schon. Die Induktivität  $L$  wirkt als Energiespeicher.

Zum Vorzeichen: Der Strom, welcher durch das Zusammenbrechen eines Magnetfeldes verursacht wird, ist jenem Strom entgegengerichtet, der das Magnetfeld in der Spule aufgebaut hat (vgl. Lenz'sche Regel).

**Rechtschraubregel:** Dreht man eine rechtsgängige Schraube in Richtung des Stromes, der durch die Windungen der Spule fließt, so bewegt sie sich auf den Nordpol des Magnetfeldes zu.

### Gegenseitige Induktion:

Für 2 *magnetisch ideal gekoppelte* Spulen gilt:

$$L_{12} = N_1 N_2 \frac{\mu A}{l} \quad \left[ \frac{Vs}{A} \right]; [H] \quad (V-12)$$

## VI Wechselstromkreise

### Allgemeine Hinweise:

- Sind Strom  $i$  und Spannung  $u$  zeitlich veränderlich, werden beide durch *kleine* Buchstaben dargestellt.
- Die hier aufgestellten Regeln gelten (falls nichts anderes angegeben) *ausschließlich* für *sinusförmige* Ströme und Spannungen.
- Nicht-sinusförmige Ströme oder Spannungen können mit Hilfe der *Fourier-Analyse* in Summen von sinusförmigen Größen zerlegt werden, so dass die hier beschriebenen Rechenverfahren auf die *einzelnen* Glieder dieser Zerlegung angewandt werden können. Siehe hierzu auch Kapitel ›IX Allgemeine, nicht-sinusförmige periodische Signale‹.

### Strom $i$ :

$$\boxed{i = \hat{i} \sin(\omega t + \varphi_i)} \quad [A] \quad (VI-1)$$

Darstellung des Stromes  $I$  als "rotierender" Zeiger:

$$\boxed{\underline{I} = I e^{j(\omega t + \varphi_i)}} \quad [A] \quad (VI-2)$$

$I$ : Effektivwert des Stromes

### Spannung $u$ :

$$\boxed{u = \hat{u} \sin(\omega t + \varphi_u)} \quad [V] \quad (VI-3)$$

Darstellung der Spannung  $U$  als "rotierender" Zeiger:

$$\boxed{\underline{U} = U e^{j(\omega t + \varphi_u)}} \quad [V] \quad (VI-4)$$

$U$ : Effektivwert der Spannung

### Periodendauer $T$ :

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}} \quad [s] \quad (VI-5)$$

### Frequenz $f$ :

$$\boxed{f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}} \quad [Hz] \quad \left[\frac{1}{s}\right] \quad (VI-6)$$

### Kreisfrequenz $\omega$ :

$$\boxed{\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}} \quad \left[\frac{1}{s}\right] \quad (VI-7)$$

### Gleichrichtwerte:

$$\boxed{|\bar{i}| = \frac{2}{\pi} \cdot \hat{i}} \quad [A] \quad (VI-8)$$

$$\boxed{|\bar{u}| = \frac{2}{\pi} \cdot \hat{u}} \quad [V] \quad (VI-9)$$

Bedeutung: zeitlicher Mittelwert des *Betrages* einer Funktion.

Für die Gleichrichtwerte von allgemeinen, auch *nicht-sinusförmigen* periodischen Signalen, siehe Kapitel ›IX Allgemeine, nicht-sinusförmige periodische Signale‹.

**Effektivwerte:**

$$I = \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}} \quad [A] \quad (\text{VI-10})$$

$$U = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \quad [V] \quad (\text{VI-11})$$

Bedeutung: Der periodisch zeitabhängige Strom  $i$  erzeugt im Mittel die gleiche Wärmeleistung wie der Gleichstrom  $I$ .

Für die Effektivwerte von allgemeinen, auch *nicht-sinusförmigen* periodischen Signalen, siehe Kapitel ›IX Allgemeine, nicht-sinusförmige periodische Signale‹.

**Formfaktor  $F$ :**

$$F = 1,111 \quad (\text{VI-12})$$

Der Formfaktor  $F$  bezeichnet bei Wechselgrößen das Verhältnis des *Effektivwertes* zum *Gleichrichtwert*. Er gilt für Ströme sowie Spannungen gleichermaßen.

Für die Berechnung des Formfaktors von allgemeinen, auch *nicht-sinusförmigen* periodischen Signalen, siehe Kapitel ›IX Allgemeine, nicht-sinusförmige periodische Signale‹.

**Scheitelfaktor  $\sigma$ :**

$$\sigma = \sqrt{2} \quad (\text{VI-13})$$

Das Verhältnis des *Scheitelwertes* zum *Effektivwert* heißt Scheitelfaktor. Er gilt für Spannungen sowie Ströme gleichermaßen.

Für die Berechnung des Scheitelfaktors von allgemeinen, auch *nicht-sinusförmigen* periodischen Signalen, siehe Kapitel ›IX Allgemeine, nicht-sinusförmige periodische Signale‹.

**Komplexe Widerstände**

Impedanz  $\underline{Z}$ :

$$\underline{Z} = R + jX \quad [\Omega] \quad (\text{VI-14})$$

R: Wirkwiderstand  
X: Blindwiderstand

$$\text{auch: } \underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{1}{\underline{Y}}$$

Admittanz $\underline{Y}$ :	$\underline{Y} = G + jB$ <p>G: Wirkleitwert B: Blindleitwert</p> <p>auch: <math>\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{1}{\underline{Z}}</math></p>	[S]	(VI-15)
Ohmischer Widerstand:	$R = \frac{U}{I}$ <p>Ohmischer Widerstand R auch Wirkwiderstand, Resistanz</p>	[Ω]	(VI-16)
	$G = \frac{1}{R} = \frac{I}{U}$ <p>Ohmischer Leitwert auch Wirkleitwert, Konduktanz</p> <p><math>\varphi = \varphi_u - \varphi_i = 0^\circ</math> <math>\underline{U}</math> und <math>\underline{I}</math> sind in Phase (<i>frequenzunabhängig</i>)</p>	[S]	(VI-17)
Spule:	$X_L = \omega L$ <p>Blindwiderstand (auch Reaktanz, induktiver Blindwiderstand)</p>	[Ω]	(VI-18)
	$B_L = -\frac{1}{\omega L}$ <p>Blindleitwert (auch Suszeptanz, induktiver Blindleitwert)</p> <p><math>\varphi = \varphi_u - \varphi_i = 0^\circ - 90^\circ = -90^\circ</math> (<math>\underline{U}</math> eilt <math>\underline{I}</math> um <math>90^\circ</math> voraus)</p>	[S]	(VI-19)
Kondensator:	$X_C = -\frac{1}{\omega C}$ <p>Blindwiderstand (auch Reaktanz, kapazitiver Blindwiderstand)</p>	[Ω]	(VI-20)
	$B_C = \omega C$ <p>Blindleitwert (auch Suszeptanz oder kapazitiver Blindleitwert)</p>	[S]	(VI-21)

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i = 0^\circ - (-90^\circ) = +90^\circ$$

(U eilt I um 90° nach)

**Reflexionskoeffizient  $\Gamma$ :**

Der Reflexionskoeffizient  $\Gamma$  gibt an, *wie* ein Signal am Ende einer Leitung reflektiert wird, d. h. mit welcher Phase und Amplitude es zurückläuft.

$$\Gamma = \frac{U_r}{U_0} \quad [\text{einheitenlos}] \quad (\text{VI-22})$$

$U_r$ : reflektierte Amplitude [V]

$U_0$ : hinlaufende Amplitude [V]

(Größen sind komplex, d. h. haben Betrag und Phase.)

$$\Gamma = \frac{Z_x - R_0}{Z_x + R_0} \quad [\text{einheitenlos}] \quad (\text{VI-23})$$

$Z_x$ : Abschlussimpedanz

$R_0$ : Wellenwiderstand der Leitung

$$\Gamma = \frac{z_x - 1}{z_x + 1} \quad [\text{einheitenlos}] \quad (\text{VI-24})$$

mit der normierten Impedanz  $z_x = \frac{Z_x}{R_0}$ .

$$Z_x = R_0 \cdot \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma} \quad [\Omega] \quad (\text{VI-25})$$

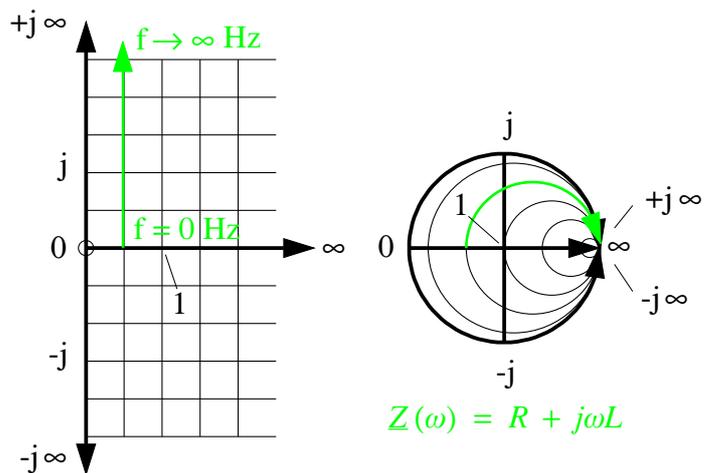
$\Gamma$  kann nicht größer als  $|1|$  sein, da das hinlaufende Signal  $U_0$  nur abgeschwächt, aber niemals verstärkt werden kann.

Spezialfälle:

$Z_x =$	Leitungsende	$\Gamma =$
$R_0$	angepasst	0
$\infty$	offen	1
0	Kurzschluss	-1

**Smith-Diagramm:**

Für die Darstellung von Frequenzgängen verwendet man das *Smith-Diagramm*.



Das Smith-Diagramm bildet die rechte Seite der komplexen Ebene in einem Kreis wieder ab. Dazu nimmt man die beiden Endpunkte der Imaginär-Achse, die ins Unendliche führen, und biegt sie so um, dass sie mit dem Unendlichkeits-Ende der reellen Achse zusammenfallen. Die zur imaginären Achse parallel liegenden und senkrecht stehenden Koordinatenlinien finden sich im Smith-Diagramm als geschlossene Kreise wieder, von denen jeweils ein Punkt stets im "Unendlichkeitspunkt" des Diagrammes liegt.

Die Skaleneinteilung des Smith-Diagrammes ist nicht mehr linear und einheitenlos. Frequenzgänge müssen daher durch einen geeigneten *Bezugswiderstand* dividiert werden (üblich sind 50 Ω).

## Leistung

Scheinleistung  $\underline{S}$ :

$$\underline{S} = UI = \underline{U}I^* = P + jQ \quad (\text{VI-26})$$

**Achtung:**  $UI^*$ , d. h.  $I^*$  ist *konjugiert* komplex (Vorzeichenumkehr des Imaginärteils).

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad [\text{VA}] \quad (\text{VI-27})$$

P: Wirkleistung

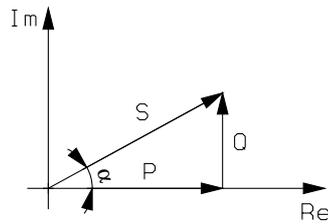
Q: Blindleistung

Wirkleistung P:

$$P = UI \cos(\varphi) = S \cos(\varphi) \quad [\text{W}] \quad (\text{VI-28})$$

Blindleistung Q:

$$Q = UI \sin(\varphi) = S \sin(\varphi) \quad [\text{var}] \quad (\text{VI-29})$$



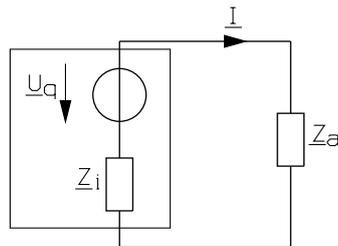
**Bild:** Der Zusammenhang zwischen Wirkleistung P, Blindleistung Q und Scheinleistung S in der komplexen Ebene.

Phasenverschiebungswinkel  $\varphi$ :  $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$  (VI-30)

Leistungsfaktor:  $\cos(\varphi) = \frac{P}{S}$  (VI-31)

Blindfaktor:  $\sin(\varphi) = \frac{Q}{S}$  (VI-32)

Wirkleistungsanpassung:  $Z_a = Z_i^*$  (VI-33)

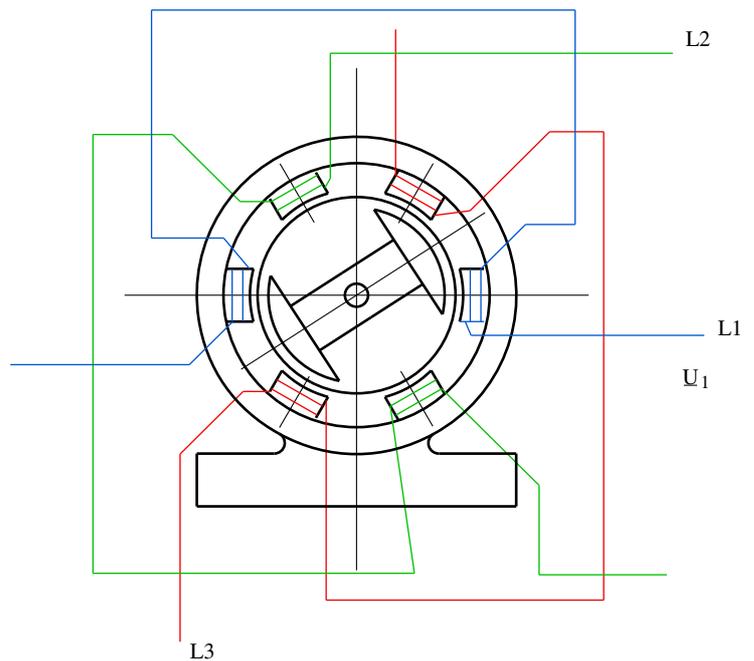


Resonanzbedingung:  $Im(Z) = 0$  (VI-34)

## VII Drehstrom

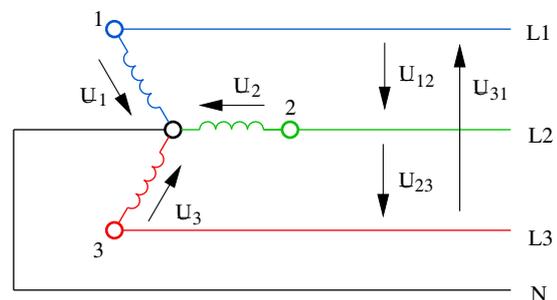
### Allgemeines

- basiert auf sinusförmigen Wechselstrom
- besteht aus 3 Strängen
- Außenleiterspannung ist die Spannung zwischen *verschiedenen Strängen*.
- Strangspannung ist die erzeugte Spannung auf *einem Strang*.
- Die erzeugten Spannungen sind um je  $120^\circ$  *zueinander* verschoben.
- Die *Außenleiterspannungen* eilen den *Strangspannungen* um  $30^\circ$  vor.

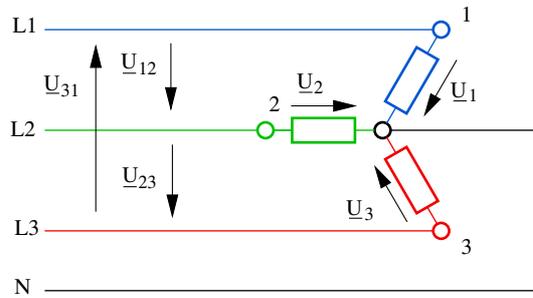


**Bild:** Funktionsprinzip des *Drehstromgenerators*. Die einzelnen Stränge (Sternschaltung) sind farbig markiert.

### Sternschaltung:



**Bild:** Sternschaltung (hier: eines Drehstrom-Generators).  $\underline{U}_1$ ,  $\underline{U}_2$ ,  $\underline{U}_3$  sind *Strangspannungen*.  $\underline{U}_{12}$ ,  $\underline{U}_{23}$  und  $\underline{U}_{31}$  sind *Außenleiterspannungen*.



**Bild:** Sternschaltung (hier: eines Verbrauchers).  $\underline{U}_1$ ,  $\underline{U}_2$ ,  $\underline{U}_3$  sind Strangspannungen.  $\underline{U}_{12}$ ,  $\underline{U}_{23}$  und  $\underline{U}_{31}$  sind Außenleiterspannungen.

- Dreileiter- (ohne Neutralleiter) oder Vierleitersystem (mit N)

Außenleiterspannung:

$$\boxed{U = \sqrt{3} \cdot U_{St}} \quad [V] \quad (\text{VII-1})$$

Die Außenleiterspannungen  $|\underline{U}| = |\underline{U}_{12}| = |\underline{U}_{23}| = |\underline{U}_{31}|$  eilen den mit ihnen verknüpften Strangspannungen  $|\underline{U}_{St}| = |\underline{U}_1| = |\underline{U}_2| = |\underline{U}_3|$  um jeweils  $30^\circ$  vor.

Neutralleiter:  
(nicht angeschlossen)

$$\boxed{\underline{U}_N = \frac{U_1 Y_1 + U_2 Y_2 + U_3 Y_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3}} \quad [V] \quad (\text{VII-2})$$

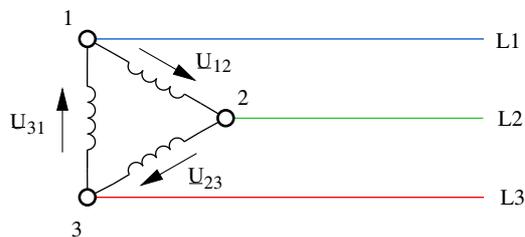
Bei symmetrischer Belastung ( $Z_1 = Z_2 = Z_3$ ) wird  $\underline{U}_N = 0$ .

Strom I:

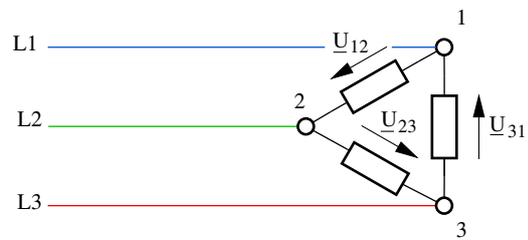
Bei *symmetrischer* Belastung und *ohne angeschlossenen Neutralleiter* gilt:

$$\boxed{I = \frac{U_{St}}{Z} = \frac{U}{\sqrt{3} \cdot Z}} \quad [A] \quad (\text{VII-3})$$

Dreieckschaltung:



**Bild:** Dreiecksschaltung (hier: eines Drehstromgenerators).



**Bild:** Dreiecksschaltung (hier: eines Verbrauchers).

- *kein* Neutralleiter

Außenleiterspannung: 
$$U = U_{St} \quad [V] \quad (VII-4)$$

Außenleiterspannungen  $U = U_{12} = U_{23} = U_{31}$   
Strangspannungen  $U_{St}$

Strom I: Bei *symmetrischer* Belastung ( $Z_1 = Z_2 = Z_3$ ) gilt:

$$I = \sqrt{3} \cdot I_{St} \quad [A] \quad (VII-5)$$

**Leistung** Der in diesem Abschnitt aufgeführte Strom  $I_{Str}$  ist *immer* der *Strangstrom* (für *Stern-* sowie *Dreiecksschaltung*).

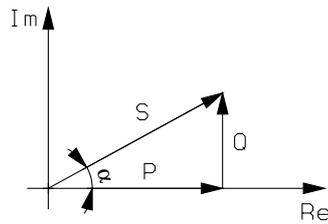
**Symmetrische Belastung** Bei *symmetrischer Belastung* ( $Z_1 = Z_2 = Z_3$ ) gilt für *Stern-* sowie *Dreiecksschaltung* gleichermaßen:

Die Summe der Augenblicksleistungen der drei Stränge ist *zeitlich konstant*.

Scheinleistung S: 
$$S = \sqrt{3}UI_{Str} \quad [VA] \quad (VII-6)$$

Wirkleistung P: 
$$P = \sqrt{3}UI_{Str}\cos\varphi \quad [W] \quad (VII-7)$$

Blindleistung Q: 
$$Q = \sqrt{3}UI_{Str}\sin\varphi \quad [var] \quad (VII-8)$$



**Bild:** Der Zusammenhang zwischen Wirkleistung P, Blindleistung Q und Scheinleistung S in der komplexen Ebene.

Phasenverschiebungswinkel  $\varphi$ :  $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$  (VII-10)

Leistungsfaktor:  $\cos(\varphi) = \frac{P}{S}$  (VII-11)

**Unsymmetrische Belastung**

Bei unsymmetrischer Belastung ( $Z_1 \neq Z_2 \neq Z_3$ ) müssen die Leistungen jedes einzelnen Verbrauchers addiert werden:

$p = p_1 + p_2 + p_3$  (VII-12)

Die Summe der Augenblicksleistungen der drei Stränge ist zeitlich *nicht* konstant.

## VIII Drosselspulen und magnetisch gekoppelte Kreise

Drosselspule mit Eisenkern:

$$U = 4,44Nf\hat{\Phi}$$

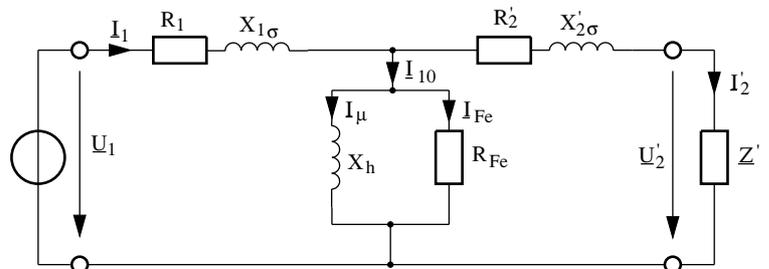
[V]

(VIII-1)

$\hat{\Phi}$  sinusförmig

U: Effektivwert (~)

Transformator mit Eisenkern



**Bild:** Ersatzschaltbild eines Transformators

**Eisenverluste** durch *Erwärmung* eines vorhandenen Eisenkernes:

$X_h$ : Hauptblindwiderstand (durch *Hystereseverluste*)

$R_{Fe}$ : Eisenverlustwiderstand (durch *Wirbelstromverluste*)

$I_\mu$ : Magnetisierungsstrom

$I_{Fe}$ : Eisenverluststrom

$I_{10}$ : Leerlaufstrom

**Spulenverluste:**

$X_{1\sigma}$ ,  $X'_{2\sigma}$ : Streublindwiderstände der Spulen (Verlust von  $\Phi_m$ )

$R_1$ ,  $R_2$ : ohmische Wicklungswiderstände

Übersetzungsverhältnis  $\ddot{u}$ :

$$\ddot{u} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{U_1}{U_2} = \frac{I_2}{I_1}$$

(VIII-2)

Ohmischer Wicklungswiderstand  $R_2$ :

$$R'_2 = \ddot{u}^2 R_2$$

[ $\Omega$ ]

(VIII-3)

Ohmischer Wicklungswiderstand der Spule.

Streublindwiderstand  $X_{2\sigma}$ :

$$X'_{2\sigma} = \ddot{u}^2 X_{2\sigma}$$

[ $\Omega$ ]

(VIII-4)

Streuverlust: Ein Teil des magnetischen Flusses läuft *nicht* durch die Spule.

Belastungswiderstand  $Z$ :

$$Z' = \ddot{u}^2 Z$$

[ $\Omega$ ]

(VIII-5)

Sekundärspannung  $\underline{U}_2$ :  $\boxed{\underline{U}'_2 = \ddot{u}U_2}$  [V] (VIII-6)

Sekundärstrom  $I_2$ :  $\boxed{I'_2 = \frac{1}{\ddot{u}}I_2}$  [A] (VIII-7)

## IX Allgemeine, nicht-sinusförmige periodische Signale

**Gleichrichtwerte:**  $\overline{|i|} = \frac{1}{T} \int_0^T |i| dt$  [A] (IX-1)

$\overline{|u|} = \frac{1}{T} \int_0^T |u| dt$  [V] (IX-2)

Bedeutung: zeitlicher Mittelwert des *Betrages* einer Funktion.

Für *sinusförmige* Signale: siehe Kapitel >VI Wechselstromkreise<.

**Effektivwerte:**  $I = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T i^2 dt}$  [A] (IX-3)

$U = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T u^2 dt}$  [V] (IX-4)

Bedeutung: Der periodisch zeitabhängige Strom  $i$  erzeugt im Mittel die gleiche Wärmeleistung wie der Gleichstrom  $I$ .

Für *sinusförmige* Signale: siehe Kapitel >VI Wechselstromkreise<.

**Formfaktor:**  $F = \frac{I}{\overline{|i|}} = \frac{U}{\overline{|u|}}$  (IX-5)

Der Formfaktor  $F$  bezeichnet bei Wechselgrößen das Verhältnis des *Effektivwertes* zum *Gleichrichtwert*. Er gilt für Strom sowie Spannung gleichermaßen.

Für *sinusförmige* Signale: siehe Kapitel >VI Wechselstromkreise<.

**Scheitelfaktor:**  $\sigma = \frac{\hat{i}}{I} = \frac{\hat{u}}{U}$  (IX-6)

Das Verhältnis des *Scheitelwertes* zum *Effektivwert* heißt Scheitelfaktor. Er gilt für Spannung sowie Strom gleichermaßen.

Für *sinusförmige* Signale: siehe Kapitel >VI Wechselstromkreise<.

## Anhang

### Literaturverzeichnis

- Hagmann, Gert: "Grundlagen der Elektrotechnik", ISBN 978-3-89104-730-9, 14. Auflage, AULA-Verlag, Verlag für Wissenschaft und Forschung, Wiebelsheim, 2009
- Lehmann, Schmidt: "Physik - Gravitations-, elektrisches und magnetisches Feld", ISBN 3-89449-121-3, Stark Verlagsgesellschaft mbH, Freising 2004
- Klein, Martin: "Einführung in die DIN-Normen", ISBN 3-519-16301-2, 12. Auflage, Teubner, Berlin 1997
- Dr. Christian Zentner, Dr. Nora Wiedenmann, Dr. Reinhard Barth: "Zahlen & Formeln", ISBN 3-907200-05-5, Otus Verlag AG, St. Gallen 2006
- Friedrich Tabellenbuch Elektrotechnik / Elektronik, ISBN 978-3-427-53025-1, 583. Auflage, Bildungsverlag EINS GmbH, Troisdorf 2009