Formelsammlung
Technische Mechanik

Hinweis:

Diese Formelsammlung wurde auf einem britischen Kinetic RiscPC unter dem Betriebssystem RISC OS 4.36 erstellt. Für den Satz wurde Techwriter verwendet. Die Zeichnungen entstanden mit Hilfe von ProCAD+ und ArtWorks.

TechWriter, ArtWorks: http://www.mw-software.com
ProCAD: http://www.dsnell.zynet.co.uk
Beagle-Board: http://specialcomp.com/
RISC OS Open: http://www.riscosopen.org
RISC OS Ltd.: http://www.riscos.com
Virtual Acorn: http://www.virtualacorn.co.uk

Diese Formelsammlung erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit oder Richtigkeit.

Alexander Ausserstorfer
http://home.chiemgau-net.de/ausserstorfer/

Formelzeichen

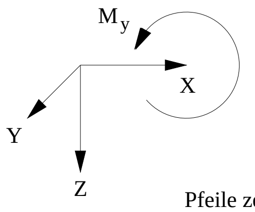
E	Elastizitätsmodul	$\left[\frac{N}{mm^2}\right]$
ε	Dehnung	-
F_N	Normalkraft	[N]
Fq	Querkraft	[N]
G	Gleitmodul	$\left[\frac{N}{mm^2}\right]$
q	(konstante) Streckenlast	$\left[\frac{F}{N}\right]$
I	Flächenträgheitsmoment	$[mm^4]$
$\vec{M}_p$	Drehmoment	$[Nm]$
σ	Normalspannung	$\left[\frac{N}{mm^2}\right]$
τ	Schubspannung	$\left[\frac{N}{mm^2}\right]$
v	Querkontraktionszahl	-

Drehmoment

$$\vec{M}_p = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$M_p = rF\cos(\alpha)$$

Gleichgewichtsbedingungen



Pfeile zeigen in jeweils positive Koordinatenrichtung.

$$\sum F_x = 0, \sum F_y = 0, \sum F_z = 0$$

Querkraft F_q:

(bei konstanter Streckenlast)

$$F_q = qx$$

Drehmomentverlauf M_y:

(bei konstanter Streckenlast)

$$M_y = \int F_q dx = \frac{1}{2}qx^2$$

Statische Bestimmtheit von Lagern

$$f_k = mb - \sum_{k=1}^{n} U_k$$

m: Anzahl der Teilkörper
b: Freiheitsgrad (3 f. Ebene, 6 f. Raum)
U_k: Anzahl der eingeschränkten Freiheitsgrade eines Teillagers

$f_k = 0$: statisch bestimmt gelagert
$f_k > 0$: statisch unbestimmt gelagert
$f_k < 0$: statisch überbestimmt gelagert

Fachwerke

Bestimmtheit von Fachwerken

$s = 2k - b$: statisch u. kinematisch bestimmt
$s > 2k - b$: statisch unbestimmt (überbestimmt)
$s > 2k - b$: kinematisch unbestimmt

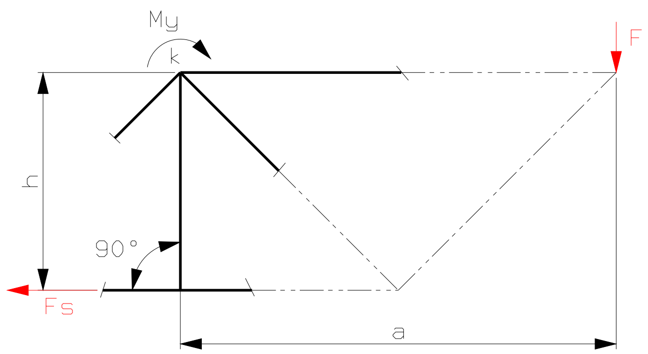
Hinweis: Formel gelten nur für aus Dreiecksmaschen aufgebaute Fachwerke

s: Anzahl der Stäbe
k: Anzahl der Knoten
b: Freiheitsgrad (3 f. Ebene, 6 f. Raum)

Knotenpunktverfahren

$$\sum F_x = 0; \quad \sum F_y = 0$$

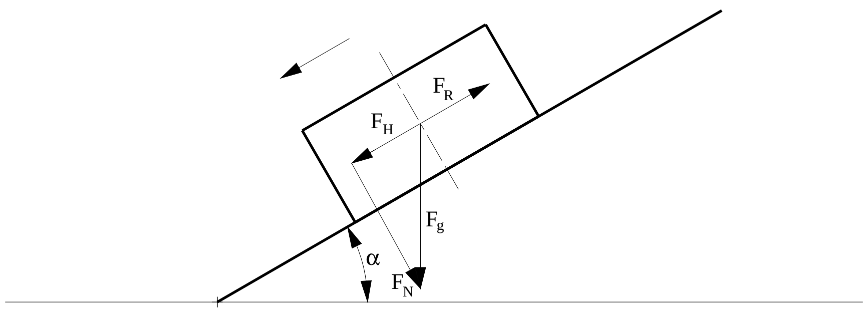
Schnittverfahren nach Ritter



$$\sum M_x = 0$$

Reibung

- Die Reibung wirkt immer der Bewegung entgegen.



$$F_R = \mu F_N$$

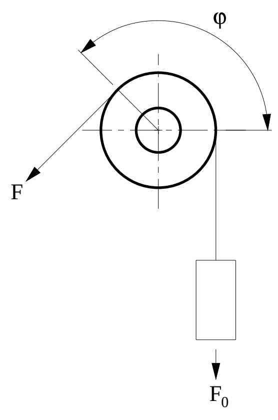
μ_0 : Haftreibungszahl
μ : Gleitreibungszahl

$$\varepsilon = arctan(\mu)$$

Körper haftet f. $\alpha < \varepsilon$, da $F_H < F_R$
Körper gleitet f. $\alpha > \varepsilon$, da $F_H > F_R$

Selbsthemmend f. $\alpha < \varepsilon_0$.

Seilreibung



Bewegung in Richtung F: $F = F_0 e^{\mu\varphi}$
Bewegung in Richtung F$_0$: $F = F_0 e^{-\mu\varphi}$

Spannungen

Normalspannung σ

$$\sigma = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_N}{\Delta A} = \frac{dF_N}{dA} = (E\varepsilon)$$

Für gleichmäßige Verteilung von F_N gilt:

$$\sigma = \frac{F_N}{A}; \ \ wobei\ F_N \perp A$$

<u>Es gilt:</u>
$\sigma > 0$: Zugspannung
$\sigma < 0$: Druckspannung

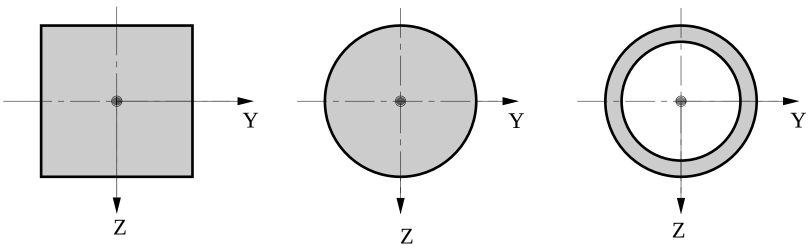
Schubspannung τ

$$\tau = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_Q}{\Delta A} = \frac{dF_Q}{dA} = (G\gamma)$$

Für gleichmäßige Verteilung von Fq gilt:

$$\tau = \frac{F_q}{A}; \ \ wobei\ F_q \parallel A$$

Bei flächigen Querschnitten wird τ_q überwiegend im mittleren Bereich des Profils übertragen.

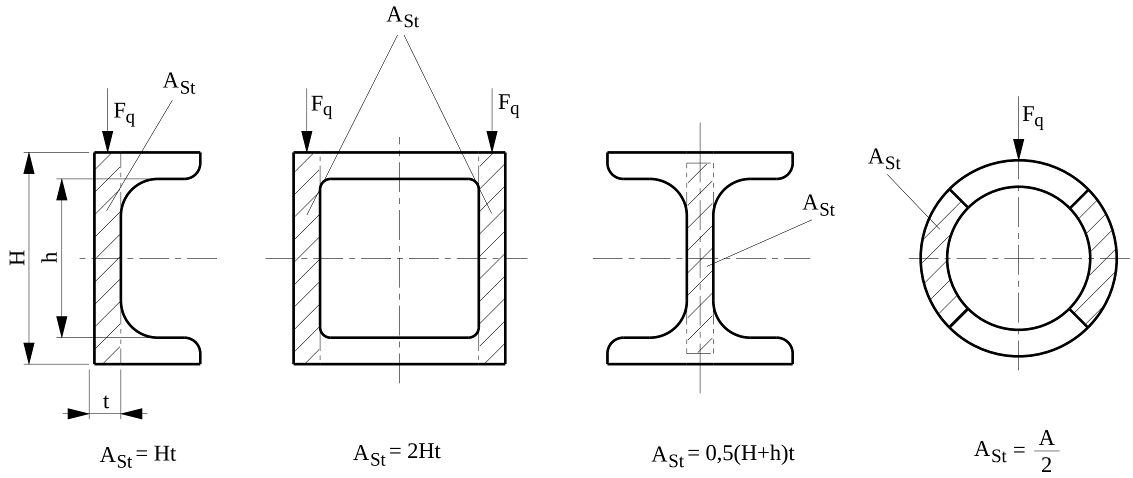


a = 1,5 a=4/3 a=2

$$\tau_{max} = a\frac{F_q}{A}$$

a: Formfaktor

Bei Flanschprofilen wird τ_q überwiegend durch die senkrechten Anteile eines Profils übertragen.



$$\tau_{max} = \frac{F_q}{A_{St}}$$

Zu beachten ist ggf. der Schubmittelpunkt.

Dehnung ε

Für Längsrichtung gilt:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$$

Δl : Längenänderung
l_0 : ursprüngliche Länge

Für Querrichtung gilt:

$$\varepsilon_q = \frac{\Delta d}{d_0}$$

Δd : Änderung des Durchmessers
d_0 : ursprünglicher Durchmesser

Wärmedehnung

$$\varepsilon_{th} = \frac{(l - l_0)}{l_o} = \frac{\Delta l}{l_0} = \alpha (T - T_0) = \alpha \Delta T$$

T: Temperatur [K]
α: Längenausdehnungskoeffizient $\left[\frac{1}{K}\right]$

Elastizitätsmodul E

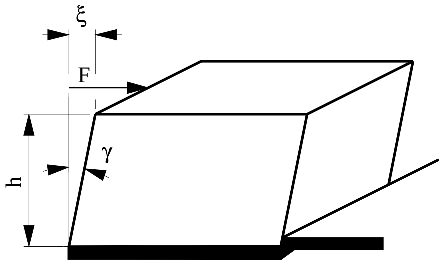
- Maßzahl für die Starrheit eines Werkstoffes bei elastischer Deformation durch Normalspannungen.

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

Gleitmodul G

- Maßzahl für die Starrheit eines Stoffes bei elastischer Deformation durch Schubspannungen.

$$G = \frac{\tau}{\gamma}$$



Für kleine Winkel gilt:

$$\gamma \approx \tan \gamma = \frac{\xi}{h}$$

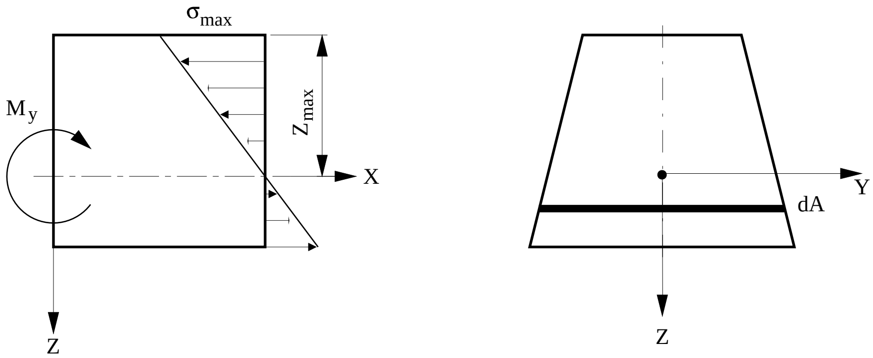
Querkontraktionszahl / Querzahl v
(v wird auch als Poisson-Zahl bezeichnet)

$$v = \frac{\varepsilon_q}{\varepsilon}$$

Zusammenhang zwischen dem E-Modul, G-Modul und der Querzahl v

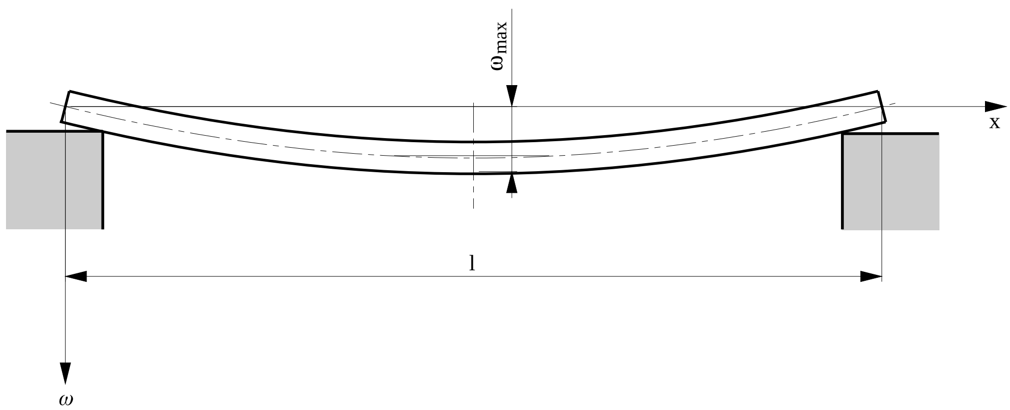
$$v = \frac{E}{2G - 1};\ G = \frac{E}{2(1 + v)};\ E = 2G(1 + v)$$

Grundgleichung der Biegung



$$\sigma(z) = \frac{M_y}{I_y}z$$

Die Biegelinie ω



(ω(x) ist eine Funktion von x)

Für die Krümmung (2. Ableitung) gilt:

$$\omega'' = -\frac{M_y}{EI_y}$$

Krümmung ist als Kehrwert des *Krümmungsradius* ρ definiert:

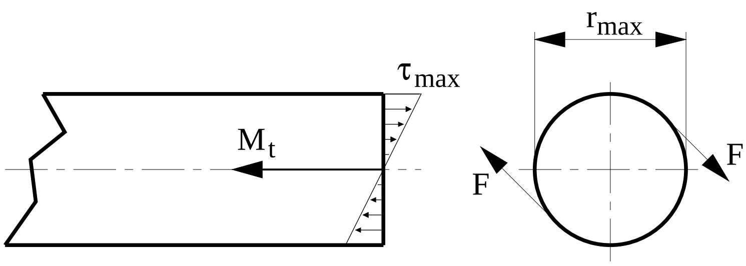
$$\rho = \frac{EI}{M_y}$$

Zusammenhang zwischen den einzelnen Kräften und der Biegelinie ω:

$\omega(x)$	Biegelinie		
$\omega'(x)$	Steigungswinkel / Schräg-stellung		$=\varphi(x)$
$\omega''(x)$	Krümmung der Biegelinie	Drehmoment	$-M_y(x)$
$\omega'''(x)$		Querkraft	$-F_q(x)$
$\omega^{IV}(x)$		Streckenlast	$q(x)$

Die Biegelinie erhält man somit durch zweimalige Integration von $\omega''(x)$ (verursacht durch Drehmoment). Die dabei auftretenden Konstanten C_1 und C_2 müssen durch *Randbedingungen* ermittelt werden.

Verdrehung



(Momentenvektoren sind parallel verschiebbar)

Für die Beziehung der Winkel gilt:

$$\frac{\varphi}{\gamma} = \frac{l}{r}$$

Daraus folgt:

$$M_t = Fr = \int r\tau dA = \frac{G\varphi}{l}\int r^2 dA = \frac{\tau_{max}}{r_{max}}\int r^2 dA = \frac{G\varphi}{l} I_p$$

Verdrehwinkel (Torsionswinkel) φ:

$$\varphi = \frac{M_t l}{G I_p}$$

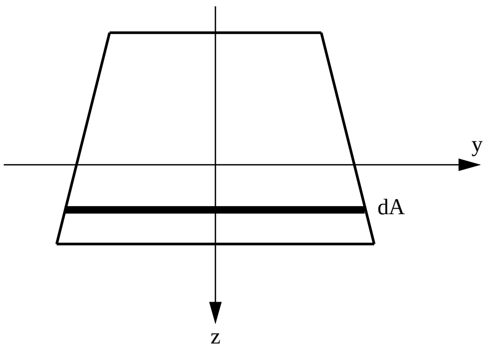
γ : Schubwinkel
φ : Verdrehwinkel
I_p : polares Flächenträgheitsmoment
l : Zylinderlänge

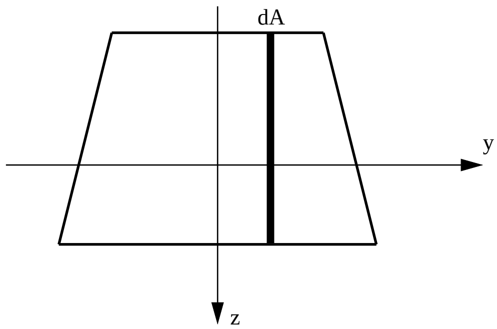
Torsionsschubspannung

$$\tau_t = \frac{M_t}{W_p}$$

Flächenträgheitsmoment I

Für Biegung und Torsion (Verdrehung) existieren verschiedene Flächenmomente (s. Tabellen)!



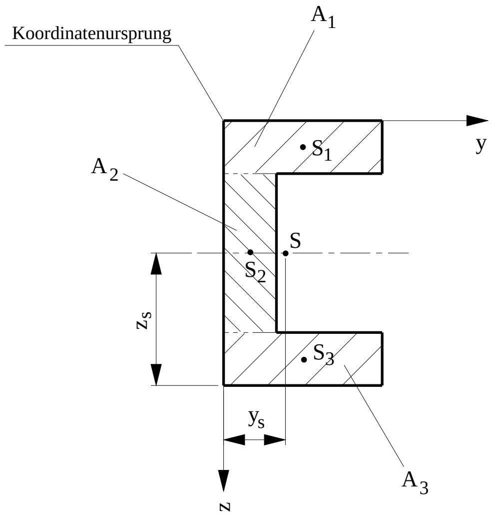


$$I_y = \int z^2 dA \qquad I_z = \int y^2 dA$$

Für die Verdrehung des Kreisquerschnittes gilt:

$$I_p = I_y + I_z = 2I_z = 2\frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi d^4}{32}$$

Flächenträgheitsmoment zusammengesetzter Profile



$$y_S = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i A_i)}{\sum_{i=1}^{n} A_i} \qquad z_S = \frac{\sum_{i=1}^{n}(z_i A_i)}{\sum_{i=1}^{n} A_i}$$

$$I_y = \sum_{i=1}^{n}\{(z_i - z_s)^2 A_i + I'_{yi}\}$$

$$I_z = \sum_{i=1}^{n}\{(y_i - y_s)^2 A_i + I'_{zi}\}$$

<u>Für die Gesamtfläche gilt:</u>
y_s, z_s : Koordinaten des Schwerpunktes
I_y, I_z : Flächenmomente um Achsen durch Schwerpunkt

<u>Für die Teilflächen gilt:</u>
y_i, z_i : Koordinaten der Flächenschwerpunkte
I'_{yi}, I'_{zi} : Flächenträgheitsmomente (um Achsen durch den Schwerpunkt dieser Teilflächen)

Widerstandsmoment W

Für Biegung und Torsion (Verdrehung) existieren *verschiedene* Widerstandsmomente (s. Tabellen)!

$$W_y = \frac{Iy}{z_{max}} \quad und \quad W_z = \frac{I_z}{y_{max}}$$

y_{max}, z_{max} : max. Abstand Schwerpunkt - Außenkante

Für die *Torsion* eines Kreises gilt:

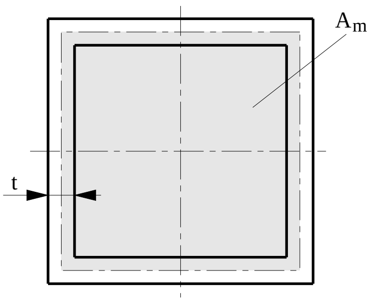
$$W_t = \frac{2I_p}{D} = \frac{\pi d^3}{16} = (2W)$$

Für die *Torsion* eines Rohres gilt:

$$W_t = \frac{2I_p}{D} = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{D^4 - d^4}{D}$$

D : Außendurchmesser
d: Innendurchmesser

Torsion dünnwandiger geschlossener Profile (Bredtsche Formel)



$$M_t = ut\tau r, \ \ mit\ ur = 2A_m$$

$$\tau(t) = \frac{M_t}{W_t} = \frac{M_t}{2tA_m}$$

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{2t_{min}A_m}$$

t : Wanddicke
A_m : Fläche zur Mittellinie
u: Profilumfang

Hinweis: Der Hebelarm zu M_t ist in der Fläche A_m versteckt.

Bauteilsicherheit

$$\sigma_{max} \leqslant \sigma_{zul}$$

$$\sigma_{max} = \frac{F}{A_{min}}$$

A_{min} : kleinste Querschnittsfläche

$$\sigma_{zul} = \frac{R_e}{S} \qquad mit\ 1{,}5 \leqslant S \leqslant 2$$

$$\sigma_{zul} = \frac{R_m}{S} \qquad mit\ 2{,}5 \leqslant S \leqslant 3{,}5$$

σ_{zul} : zulässige Spannung
σ_{max} : max. Spannung
R_e : Streckgrenze
R_m : Dehngrenze
S : Sicherheitszahl

Spannungsspitzen

- verursacht durch Kerben, raue Oberflächen, Absätze, Eindrehungen usw.

$$\left(\sigma_{max} = \frac{F}{A_{min}}\right) \leqslant \frac{\sigma_{zul}}{a_k}$$

a_k : Formzahl

Spannungshypothese

$$(\sigma_v = 2\tau_{max}) \leqslant \sigma_{zul}$$

τ_{max} : max. Schubspannung (1)*
σ_v : Vergleichsspannung (als Normalspannung) (2)
σ_{zul} : zul. Normalspannung (aus Zugversuch) (3)

* Es ist in dieser Reihenfolge vorzugehen

Normalspannungshypothese

- Man vergleicht den komplizierten Spannungszustand mit dem einfacheren eines Zugstabes oder reduziert ihn auf diesen.

$$\sigma_{zul} \geqslant \sigma_v = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

σ_{zul} : max. zulässige Zugspannung
σ_v : Vergleichsspannung (reduzierte Spannung)
σ_x : $\sum$ aller Normalspannungen in x-Richtung
σ_y : $\sum$ aller Normalspannungen in y-Richtung
τ_{xy} : $\sum$ aller Schubspannungen. (τ greift in der Ebene $\perp$ zu x, d. h. in der yz-Ebene, an und wirkt in y-Richtung.)

<u>Anwendung:</u> Die Zerstörung erfolgt ohne vorhergehende plastische Deformation (spröde Werkstoffe). Vorwiegend ruhende Beanspruchung oder stoßartige Belastung. Beispiele: Gußeisen, Schweißnähte.

Gestaltungsänderungshypothese

- Die Volumenänderungsarbeit wird durch einen allseitig gleichen Druck (Zug) verrichtet. Sie kann nicht zur Zerstörung führen. Wenn man grundsätzlich davon ausgeht, dass das Versagen eines Bauteils durch die Arbeit der Kräfte eingeleitet wird, kann das nur der Anteil der Arbeit sein, der die Gestalt ändert.

$$\sigma_{zul} \geqslant \sigma_v = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3(\alpha_0\tau_{xy})^2}$$

σ_{zul} : max. zulässige Zugspannung

σ_v : Vergleichsspannung (reduzierte Spannung)
σ_x : $\sum$ aller Normalspannungen in x-Richtung
σ_y : $\sum$ aller Normalspannungen in y-Richtung
τ_{xy} : $\sum$ aller Schubspannungen. (τ greift in der Ebene $\perp$ zu x, d. h. in der yz-Ebene, an und wirkt in y-Richtung.)
α_0 : Anstrengungsverhältnis

α_0 = 0,7 für σ wechselnd und τ schwellend
α_0 = 1,0 für σ und τ statisch oder synchron wechselnd oder schwellend
α_0 = 1,6 für σ statisch und τ wechselnd

Anwendung: Bei der Zerstörung wird ein Bruch mit *plastischer Verformung* erwartet (zähe Werkstoffe). Zusammengesetzte, überwiegend aus *Biegung* und *Torsion* zusammengesetzte Belastungen.

Belastungsfälle

nach Bach, Carl Julius von (1847 - 1931), deutscher Ingenieur

I. ruhende (statische) Belastung
Die Belastung bleibt gleich.

II. Schwellende Belastung
Die Belastung schwankt zwischen Null und einem Maximalwert.

III. Wechselnde Belastung
Es liegt ein Richtungswechsel der Belastung vor. Die Spannung wechselt zwischen einem positiven und einem gleich großen negativen Wert.