Messtechnik

Allgemeine Grundlagen

Aufgaben der Messtechnik:

- Erfassung von physikalischen Größen
- objektiv (unabhängig v. Sinnesorganen)
- reproduzierbar (wiederholbar)
- quantitativ (Zahl + Maßeinheit)

Normen und Begriffe

Messen hat rechtliche Relevanz.

- Messgröße (*true value*) x_w: (wahre) Größe (ist unbekannt)
- Messwert (*measured value*) x: Ergebnis der Messung

Messtechnische Tätigkeiten:

- Messen: Bestimmung von Messgrößen
- Prüfen: Zustandsfeststellung (Ja-/Nein-Entscheidung)
- Kalibrieren: Bestimmung der Messabweichung (kein Eingriff ins Gerät) und Bestimmung einer Korrekturtabelle oder eines Korrekturalgorithmuses mittels Referenzmessgerät oder "Normal"
- Justieren (*adjustement*): Abgleich einer Messeinrichtung zur Minimierung der Messabweichung
- *Eichen:* Prüfen von Messgeräten nach gesetzlichen Vorschriften und Anforderungen *nur von amtlicher Seite*

Einheiten und Normale:

- Messung bedeutet Vergleich einer physikalischen Größe mit einer Maßeinheit
- Größenwert = Zahl × Einheit (z. B. $s = 11{,}118\,km$)
- Größengleichung (z. B. $s = v \cdot t$)

Maßsysteme

- lokale Maßeinheiten (Fuß, Elle...): abhängig vom Erfahrungshorizont der Menschen
- globale Maßeinheiten: ideal ist die Rückführung auf Zählen mit ganzen Zahlen; Einheiten auf Naturkonstanten oder Experimenten atomarer Natur basierend

7 SI-Basiseinheiten

Ziel: Basiseinheit soll durch eindeutige Handlung physikalisch darstellbar sein

- Die Sekunde (t, [s]) ist das 9 192 631 770−fache der Periodendauer der dem Übergang zwischen den beiden Hyperfeinstrukturniveaus des Grundzustandes von Atomen des Nuklids 133 Cs entsprechenden Strahlung.
- Das Meter (l, [m]) ist die Länge der Strecke, die Licht im Vakuum während der Dauer von $\frac{1}{299\,792\,458}$ Sekunden durchläuft.
- Das Kilogramm (m, [kg]) ist gleich der Masse des Internationalen Kilogrammprototyps (bei Paris aufbewahrt)

- Das Ampere (I, [A]) ist die Stärke eines konstanten elektrischen Stromes, der durch zwei parallele, geradlinige, unendlich lange und im Vakuum im Abstand von einem Meter voneinander angeordnete Leiter von vernachlässigbar kleinem, kreisförmigen Querschnitt fließend, zwischen diesen Leitern je einem Meter Leiterlänge die Kraft $2 \cdot 10^{-7}\,N$ hervorrufen würde.
- Das Kelvin (t, [K]), die Einheit der thermodynamischen Temperatur, ist der 273,16-te Teil der thermodynamischen Temperatur des Tripelpunktes des Wassers.
- Das Mol ist die Stoffmenge eines Systemes, das aus ebensovielen Einzelteilchen besteht wie Atome in 0,012 kg (12 g) des Kohlenstoffnuklids ^{12}C enthalten sind (Bei Benutzung des Mols müssen die Teilchen spezifiziert werden.)
- Die Candela ist die Lichtstärke in einer bestimmten Richtung einer Strahlungsquelle, die monochromatische Strahlung der Frequenz $540 \cdot 10^{12}\,Hz$ aussendet (grüngelbes Licht, Wellenlänge $\lambda = 555\,nm$ und deren Strahlstärke in dieser Richtung $\frac{1}{683}$ Watt pro Steradiant beträgt.

Die Darstellung der Einheiten wird nicht unbedingt nach ihrer Definition vorgenommen, sondern es können ersatzweise andere Experimente verwendet werden, aus denen die Einheiten mit großer Genauigkeit abgeleitet werden können.

Normale und Kalibrierkette

- Zuständig für die Darstellung der Einheiten:
  PTB: Physikalisch-Technische Bundesanstalt Deutschland
  NPL: National Physical Laboratory, UK
  NIST: National Institute for Standards and Technolgy, USA
  NRLM: National Research Laboratory of Metrology, Japan
- entwickeln Messeinrichtungen, - verfahren und sogenannte Normale
- halten Normale zur Weitergabe der Einheiten an Wirtschaft und Wissenschaft bereit

Normale sind Messgeräte oder Referenzapparaturen, die den Zweck haben, eine Einheit oder einen genau bekannten Wert einer Größe darzustellen und diesen an andere Messgeräte durch Vergleich weiterzugeben.

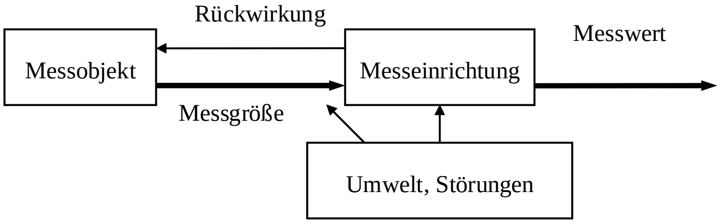
- Internationale Normale (einmalig)
- Primärnormale (in nationalen Instituten)
- Sekundärnormale (in großen Kalibrierlabors)
- Gebrauchsnormale (in Produktionsbetrieben)

Genauigkeit sinkt von Stufe zu Stufe

Rückverfolgbarkeit (*traceability*)

Messabweichung *e* (*error of measurement*)

Gründe für Messabweichungen



- begrenzte Auflösung der Messeinrichtung
- Ungenauigkeit der Messeinrichtung
- Schwankungen der Messgröße selbst. (Diese sind oft nicht unterscheidbar von Messabweichungen auf Grund von Schwankungen der Messgeräteeigenschaften.

Es gibt zwei mögliche Angaben von Messabweichungen:

- Absolute Messabweichung *e* (absoluter Fehler)
  konkrete Differenz zwischen gemessenem und wahrem Wert
  $\boxed{e = x - x_w}$
- Relative Messabweichung (relativer Fehler):
  $\boxed{e_{rel} = \frac{e}{x_w} = \frac{x - x_w}{x_w} = \frac{x}{x_w} - 1}$
  x_w ist in der Regel nicht bekannt.

Messunsicherheit μ

- ist ein Bereich um den Messwert, in dem der wahre Wert mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit liegt
- bildet Teil des Messergebnisses
- wird aus der Messung / dem Messverfahren bestimmt und kennzeichnet zusammen mit dem Messwert den Wertebereich für den wahren Wert
- kann nur abgeschätzt werden, da man den wahren Wert und damit die Messabweichung nicht kennt
- kann als absolute oder relative Messunsicherheit ausgedrückt werden

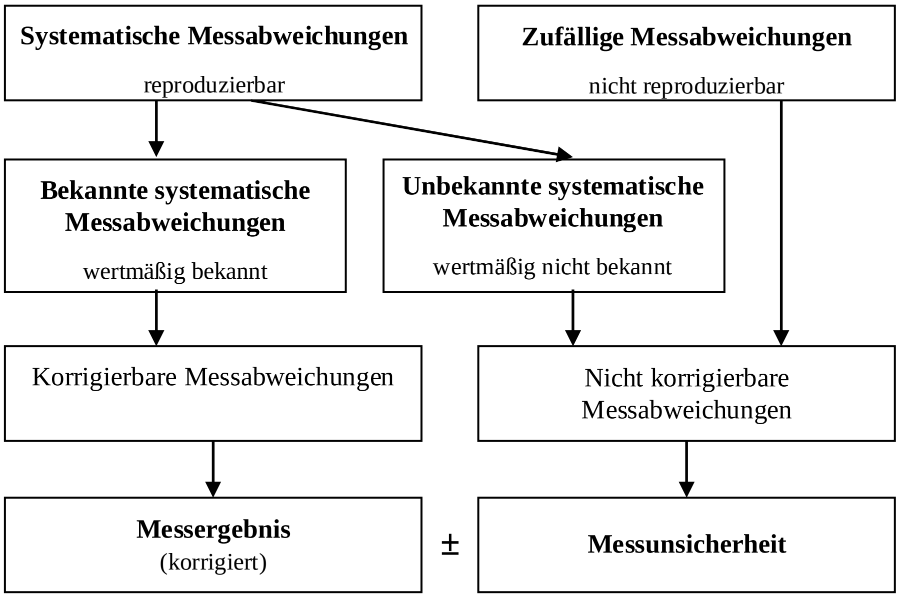
Relative Messunsicherheit: $\boxed{u_{rel} = \frac{u}{|y|}}$

Standardmessunsicherheit $u(y)$ ($\alpha = 31{,}7\,\%$ bei zufälligen Abweichungen oder Worst-Case-Fall bei unbekannten systematischen Abweichungen.)

Erweiterte Messunsicherheit $U(y) = k \cdot u(y)$ für kleineres α. Der Erweiterungsfaktor k ist von der gewählten Überschreitungswahrscheinlichkeit α abhängig. Vorzugsweise sollte $k = 2$ für annähernd $\alpha = 5\,\%$ verwendet werden.

Leider wird α oft nicht spezifiziert; bei nicht gaußförmiger, unbekannter Verteilung der Unsicherheit: schwierig.

Arten von Messabweichungen:



<u>Systematische Messabweichungen</u> (Messfehler)

- sind bei wiederholter Messung immer gleich.
- haben während der Messung einen konstanten Betrag mit einem bestimmten Vorzeichen.
- führen zu einer (in einem kurzen Zeitraum) immer gleichen, zeitlich konstanten Differenz des Messwertes vom wahren Wert, d. h. zu einem "unrichtigen" Messergebnis.
- sind durch Wiederholung der Messung unter gleichen Bedingungen nicht erkennbar.

<u>Beispiele:</u>

- unvollkommener Abgleich eines Messgerätes
- Temperaturgang eines Sensors oder Messverstärkers

<u>Bekannte systematische Messabweichung</u> $e_{sys,b}$

kann korigiert werden:

Korrektur: $\boxed{K = -e_{sys,b}}$

Korrigierter Messwert: $\boxed{x_{korr} = x + K}$

<u>Unbekannte systematische Messabweichung</u>

ist bestenfalls abschätzbar (Worst-Case-Abschätzung).

Fehlerfortpflanzung systematischer Messabweichungen

$y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$

$e_y = y - y_w = f(x_1 + e_{x_1}, \dots, x_n + e_{x,n}) - f(x_1, \dots, x_n)$

Taylorreihe abgebrochen nach 1. Glied:

$f(x_1 + e_{x_1}, \ldots, x_n + e_{x_n}) =$

$$= f(x_1, \ldots, x_n) + \frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1} e_{x_1} + \ldots + \frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_n} e_{x_n}$$

$\Delta y = f(x_1 + e_{x_1}, \ldots, x_n + e_{x_n}) - f(x_1, \ldots, x_n)$

$$\boxed{e_y = \Delta y = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} e_{x_i}}$$

<u>Regeln:</u>

1.) Addition von Messwerten $\rightarrow$ Addition der Abweichungen

$y = x_1 + x_2 \rightarrow e_y = e_{x_1} + e_{x_2}$

2.) Subtraktion von Messwerten $\rightarrow$ Subtraktion der Abweichungen

$y = x_1 - x_2 \rightarrow e_y = e_{x_1} - e_{x_2}$

3.) Multiplikation von Messwerten $\rightarrow$ Addition der <u>relativen</u> Abweichungen

$y = x_1 \cdot x_2 \rightarrow e_y = x_2 \cdot e_{x_1} + x_1 \cdot e_{x_2}$

<u>Relative Abweichungen:</u> $e_{rel\,y} = \frac{e_y}{y} = \frac{x_2 \cdot e_{x_1} + x_1 \cdot e_{x_2}}{x_1 \cdot x_2} = \frac{e_{x_1}}{x_1} + \frac{e_{x_2}}{x_2}$

4.) Division von Messwerten $\rightarrow$ Subtraktion der relativen Abweichungen

$y = \frac{x_1}{x_2} \rightarrow e_y = \frac{1}{x_2} \cdot e_{x_1} - \frac{x_1}{x_2^2} e_{x_2}$

<u>Relative Abweichungen:</u> $e_{rel\,y} = \frac{e_y}{y} = \frac{e_{x_1}}{x_1} - \frac{e_{x_2}}{x_2} = e_{rel\,x_1 - e_{rel\,x_2}}$

Regeln für Fortpflanzung der Abweichungen bei Funktionen aus <u>Potenzfaktoren:</u>

Wenn $y = k \cdot x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot x_3^{\alpha_3} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}$

dann $\boxed{e_{rel} = (\alpha_1 \cdot e_{rel1} + \alpha_2 \cdot e_{rel2} + \alpha_3 \cdot e_{rel3} + \ldots + \alpha_n \cdot e_{reln})}$

<u>Beispiel:</u>

$y = k \cdot \frac{a^5 \cdot b^7}{c^3} \rightarrow e_{rel} = \frac{\Delta y}{y} = \left(5 \frac{\Delta a}{a} + 7 \frac{\Delta b}{b} - 3 \frac{\Delta c}{c}\right)$

Zufällige Messabweichungen (Messfehler)

- auf Grund nicht beherrschbarer, nicht determinierter Einflüsse während der Messung
- schwanken zufällig von Mal zu Mal bei wiederholter Messung
- sind nicht vorausbestimmbar
- wiederholte Messungen am selben Messobjekt unter gleichen Bedingungen führen zur *Streuung der Messwerte*

- Messgröße x als statistische Größe (Zufallsgröße)

Beispiele:

- thermisches Rauschen, das einer zu messenden Spannung überlagert ist
- Übergangswiderstände bei der Kontaktierung elektrischer Bauteile
- Elektromagnetische Felder, die sich schnell ändern können, können Messeinrichtungen unvorhersehbar beeinflussen (EMV)

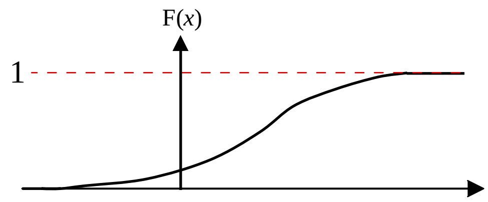
Unter einer *Grundgesamteinheit* versteht man die Gesamtheit gleichartiger Objekte oder Elemente, die hinsichtlich eines bestimmten Mermales hin untersucht werden sollen.

Unendlich oft wiederholte Messung ergibt unterschiedliche Messwerte, die statistisch verteilt sind:

Verteilungsfunktion

Die Verteilungsfunktion $F(x)$ einer Zufallsvariablen x' ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Zufallsvariable x' einen Wert annimmt, der kleiner oder gleich einer vorgegebenen reellen Zahl x ist: $F(x) = P(x' \leqslant x)$.

Aufsummierung der Anzahlen pro Intervall:



Verteilungsfunktionen besitzen folgende Eigenschaften:

- $F(x)$ ist eine monoton wachsende Funktion mit $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$
- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ (*unmögliches* Ereignis)
- $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$ (*sicheres* Ereignis)
- Die Wahrscheinlichkeit, $P(a < x' \leqslant b)$ dafür, dass die Zufallsvariable x' einen Wert zwischen a (ausschließlich) und b (einschließlich) annimmt, lässt sich mit Hilfe der Verteilungsfunktion $F(x)$ wie folgt berechnen ($a < b$): $P(a < x' \leqslant b) = F(b) - F(a)$.

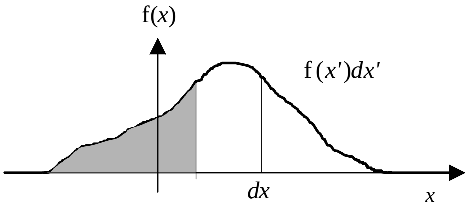
Anmerkung: Bei einer *stetigen* Zufallsvariablen gilt diese Formel auch für das abgeschlossene Intervall $a \leqslant x' \leqslant b$: $P(a \leqslant x' \leqslant b) = F(b) - F(a)$

Verteilungsdichtefunktion

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer *stetigen* Zufallsvariablen x' lässt sich durch die *Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion* oder kurz *Dichtefunktion* $f(x)$ oder durch die zugehörige *Verteilungsfunktion*

$$F(x) = P(x' \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f(x')\,dx'$$

vollständig beschreiben.



Dichtefunktion $f(x)$ und Verteilungsfunktion $F(x)$ besitzen dabei die folgenden Eigenschaften:

- $f(x) \geqslant 0$
- $f(x)$ ist normiert, d. h. es gilt: $\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x')\,dx' = 1}$
- Die monoton wachsende Verteilungsfunktion $F(x)$ ist eine Stammfunktion der Dichtefunktion $f(x)$: $F'(x) = f(x)$
- Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die stetige Zufallsvariable x' einen Wert zwischen a und b annimmt, berechnet sich wie folgt:

$$P(a \leqslant x' \leqslant b) = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

$$(a < b)$$

Erwartungswert (auch Mittelwert) μ

- Maß für Zentrum der Verteilung der Zufallsgröße

x als diskrete Zufallsvariable	x als stetige Zufallsvariable
$\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i$	$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx$

Der Mittelwert μ kennzeichnet in gewisser Weise das *Zentrum* oder die *Mitte* der Wahrscheinlichkeitsverteilung. Er ist ein bester Schätzwert für den wahren Wert, wenn die Messung durch zufällige Störungen beeinflusst wird.

Bei korrigierter systematischer Abweichung entspricht der Erwartungswert dem wahren Wert der Messgröße x': $\mu = x_w$.

Standardabweichung (auch Streuung) σ bzw. Varianz σ^2

- Maß für die Streubreite der Messwerte um den Mittelwert μ

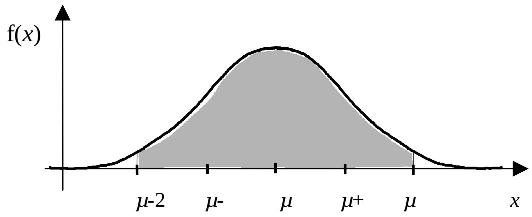
x als diskrete Zufallsvariable	x als stetige Zufallsvariable
$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (x_i - u)^2$	$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - u)^2 \cdot f(x)\,dx$

Mittlerer quadratischer Abstand vom Mittelwert.

Gauß'sche Normalverteilung

genügen einer *stetigen* Verteilung mit der *Dichtefunktion*:

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}} \qquad (-\infty < x < \infty)$$



- bei Überlagerung (Zusammenwirken) von vielen zufälligen Prozessen ergibt sich im Grenzfall häufig eine Normalverteilung
- symmetrisch
- Voraussetzung: $-\infty < x < \infty$
- Wenn die statistische Verteilung der zufälligen Abweichungen unbekannt ist, nimmt man meist eine Normalverteilung an.

68,3 %	aller Werte liegen im Bereich	$u \pm \sigma$
95 %	aller Werte liegen im Bereich	$u \pm 1{,}96\sigma$
99 %	aller Werte liegen im Bereich	$u \pm 2{,}58\sigma$
99,7 %	aller Werte liegen im Bereich	$u \pm 3\sigma$

Gleichverteilung

Die Gleichverteilung oder Rechteckverteilung besitzt eine rechteckförmige Verteilungsdichtefunktion, bei der alle vorkommenden Werte die gleiche Wahrscheinlichkeit besitzen.

Beispiel für gleichverteilte Abweichungen: Rundungsfehler

Jeder mögliche Zustand tritt mit der gleichen Wahrscheinlichkeit ein.

Vertrauensbereich für den Erwartungswert

ist jener Bereich um den Mittelwert μ, in dem der Erwartungswert (wahrer Wert) x_w mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit liegt.

Eine aus der *Grundgesamtheit* nach dem "Zufallsprinzip" herausgegriffene Teilmenge mit *n* Elementen wird als *Zufallsstichprobe vom Umfang n* bezeichnet. Aus verschiedenen Gründen ist es meist nicht möglich, alle Elemente einer endlichen oder unendlichen Grundgesamtheit auf ein bestimmtes Merkmal hin zu untersuchen. Man beschränkt sich daher auf die Untersuchung einer Stichprobe vom Umfang n, die man der Grundgesamtheit nach *dem Zufallsprinzip* entnommen hat. Die ermittelten Werte sind somit nur noch *Schätzwerte*.

Je mehr Messungen die Stichprobe umfasst, umso kleiner ist die wahrscheinliche Differenz zwischen den *ermittelten Schätzwerten einer Stichprobe* und den *tatsächlichen Werten einer Grundgesamtheit*.

Konsequenz: Je höher die Anzahl der Messungen, desto genauer können wir den wahren Wert eingrenzen.

Stichprobe aus *m* Messreihen von je *n* Messungen:

Gesamtmittelwert $\overline{x}_g$: $\boxed{\overline{x}_g = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \overline{x}_i}$

$\overline{x}_i$: Mittelwert der i-ten Messreihe.

Je größer die Zahl *n* der Messungen ist, die eine Stichprobe umfasst, umso näher kommt die *empirische Varianz* s^2 der Stichprobe an die Standardabweichung bzw. Streuung σ der (bekannten) Verteilung heran.

Die Mittelwerte x_i haben untereinander eine *Streuung* s_g, die kleiner ist als die *empirische Varianz s* in einer Stichprobe

$\boxed{s_g = \frac{1}{\sqrt{m}} \cdot s_i}$ mit $\boxed{s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}}$

Wahrscheinlichkeitstheoretische Überlegungen führen zu

$$\boxed{x \pm \frac{t}{\sqrt{n}} \cdot s}$$

$\overline{x}$	Mittelwert
s	*empirische* Varianz
n	Anzahl der Messungen
t	Faktor t laut Tabelle (s. FS.)
$1 - \alpha$	gefordertes Vertrauensniveau
α	Wahrscheinlichkeit, dass Vertrauen überschritten wird

Fehlerfortpflanzung zufälliger Abweichungen

Worst-Case-Abschätzung. Die maximalen Einzelabweichungen werden betragsmäßig addiert. Das Ergebnis liefert die ungünstigste Kombination der Abweichungen. Die *Worst-Case-Kombination* liefert Grenzwerte der Abweichungen, die nie bzw. mit einer sehr kleinen Wahrscheinlichkeit überschritten werden.

Gauß'sches Fehlerfortpflanzungsgesetz für die Fehlerfortpflanzung von *normalverteilten* zufälligen Abweichungen.

Es gehen *n* Messgrößen in das Ergebnis ein:

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Erwartungswerte für Einzelgrößen:

$$\mu_n = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} x_{ni}$$

Streuungen für Einzelgrößen:

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} (x_{ni} - u_n)^2$$

Theoretisch gilt bei Normalverteilungen für $x_1, ..., x_n$:

- Erwartungswert des Ergebnisses wird aus Erwartungswerten der Einzelgrößen berechnet: $u_y = f(u_1, u_2, ..., u_n)$

Es ist jedoch unwahrscheinlich, dass alle Abweichungen das Ergebnis in gleicher Richtung beeinflussen. → Gauß'sches Fehlerfortpflanzungsgesetz:

$$\boxed{\sigma_y^2 = \left(\frac{\delta f}{\delta x_1} \cdot \sigma_1\right)^2 + \left(\frac{\delta f}{\delta x_2} \cdot \sigma_2\right)^2 + ...\left(\frac{\delta f}{\delta x_n} \cdot \sigma_n\right)^2}$$

Fehlerfortpflanzung bei *endlichen* Stichproben:

$$\bar{y} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)$$

$$s_y^2 = \sum_{k=1}^{n} \left[\left(\frac{\delta f}{\delta x_k}\right)^2 \cdot s_k^2\right]$$ entspricht Gauß'scher Fehlerfortpflanzung

$$s_y = \sqrt{\left(\frac{\delta f}{\delta x_1} \cdot s_1\right)^2 + \left(\frac{\delta f}{\delta x_2} \cdot s_2\right)^2 + ...\left(\frac{\delta f}{\delta x_n} \cdot s_n\right)^2}$$

<u>Sonderfall</u>: tritt ein, wenn das Messergebnis *y ausschließlich* aus *Multiplikation* und Division aus den Größen x_i ermittelt wird.

$$y = k \cdot \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}$$

Unter dieser Voraussetzung gilt für die *relative Varianz* des Messergebnisses:

$$\left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_i \cdot \frac{\sigma_i}{x_i}\right)^2$$

Messergebnis (*result of measurement*)

Messwert ± Messunsicherheit ($x \pm \Delta x$)
($x \pm \Delta x$ gilt für eine *einzige* Messung. Für ein aus Messreihen ermitteltes Messergebnis gilt: $y \pm \mu$)

Angabe des vollständigen Messergebnisses

	Beispiel
$x = y \pm y$	$I = 2{,}5\,A \pm 0{,}1\,A$
$x = y \cdot (1 \pm u_{rel})$	$I = 2{,}5\,A \cdot (1 \pm 0{,}04)$
Messergebnis: y; u	Messergebnis: 2,5 A; 0,1 A
Messergebnis: y; u_{rel}	Messergebnis: 2,5 A; 0,04 oder 2,5 A; 4 %

- Häufig wird in der Praxis auch eine gemischte Form verwendet.

Zahlenwert des Messergebnisses muss in der Anzahl der signifikanten Stellen an Messunsicherheit angepasst sein.

Beispiele:

- 7,20 000 MHz $\pm$ 2,5 Hz statt 7,2 MHz $\pm$ 2,5 Hz
- 1.330.000 km $\pm$ 2.500 km oder $1{,}33 \cdot 10^6$ km $\pm$ 2.500 km statt 1.330.438 km $\pm$ 2.500 km

Regression

Zwischen einer (meist *gewöhnlichen*) Variablen X und einer *Zufallsvariablen* Y bestehe eine gewisse stochastische Bindung. Die sog. *Regressionsanalyse* hat dann die Aufgabe, die *Art* des Zusammenhangs zwischen den beiden Variablen X und Y festzustellen und zwar mit Hilfe einer *Stichprobe* $(x_1;\ y_1),\ (x_2;\ y_2),\ \ldots,\ (x_n;\ y_n)$ und eines geeigneten Ansatzes in Form einer Kurvengleichung $Y = f(X)$, die noch gewisse aus den Stichprobenpunkten berechenbare *Parameter* enthält. Dabei wird X als *unabhängige* und Y als eine von X *abhängige* Variable angesehen.

In der Statistik bezeichnet man eine solche "einseitige" Abhängigkeit als *Regression* von Y bezüglich X. Hat man die Gleichung der sog. *Regressions*- oder *Ausgleichskurve* bestimmt, so lässt sich zu einem vorgegebenen Wert x der unabhängigen Variablen X der Wert der abhängigen Variablen Y *schätzen*:

- Vermuteter funktionaler Zusammenhang mit freien Parametern
- Optimieren der Parameter, so dass Messpunkte die geringste Abweichung von der Funktion haben

Lineare Regression

Analytische Funktion: $y(x) = ax + b$

Gesuchte Parameter: Steigung a, Achsenabschnitt b

Durch Minimierung der Abstände der m Punkte $(x_i,\ y_i)$ von der durch Parameter a und b bestimmten Geraden berechnen sich diese Parameter aus den gemessenen Wertepaaren $(x_i;\ y_i)$ zu

$$\boxed{a = \frac{\sum x_i y_i - \bar{y} \sum x_i}{\sum x_i^2 - \bar{x} \sum x_i} = \frac{\sum x_i y_i - m \cdot \bar{y} \cdot \bar{x}}{\sum x_i^2 - m(\bar{x})^2}} \qquad \boxed{b = \bar{y} - a \cdot \bar{x}}$$